

钢丝切变模量

作者：刘昆承，学号：PB23020532

摘要：

关键词：

切变模量

1 引言^[1]

2 实验内容与设计

2.1 实验仪器

实验使用扭摆测量弹性模量，扭摆结构如图? 所示。

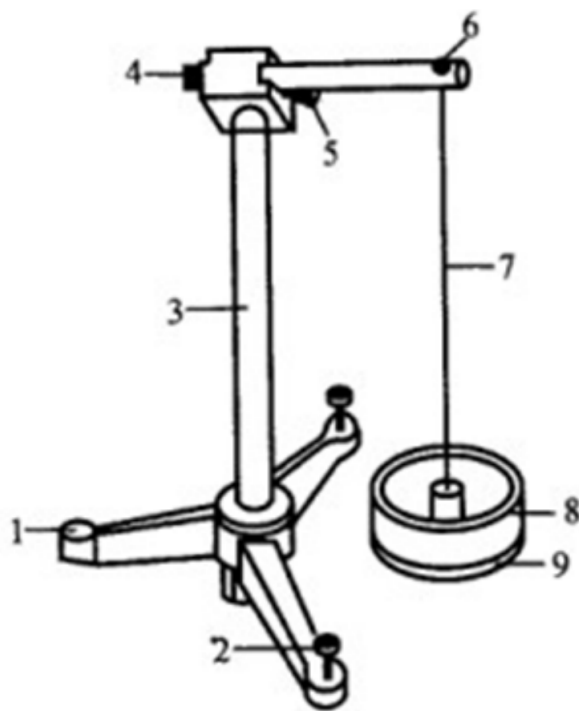


图 1: 扭摆示意图

2.2 实验内容与设计

2.2.1 实验原理

对于一根上下均匀而细长的钢丝，可将其视为弹性圆柱体，其半径为 R ，长度为 L 。将其上端固定，而使其下端发生扭转。扭转力矩使圆柱体各截面体积元均发生切应变。在弹性限度内，切应力 τ 正比于切应变 γ ，有如图

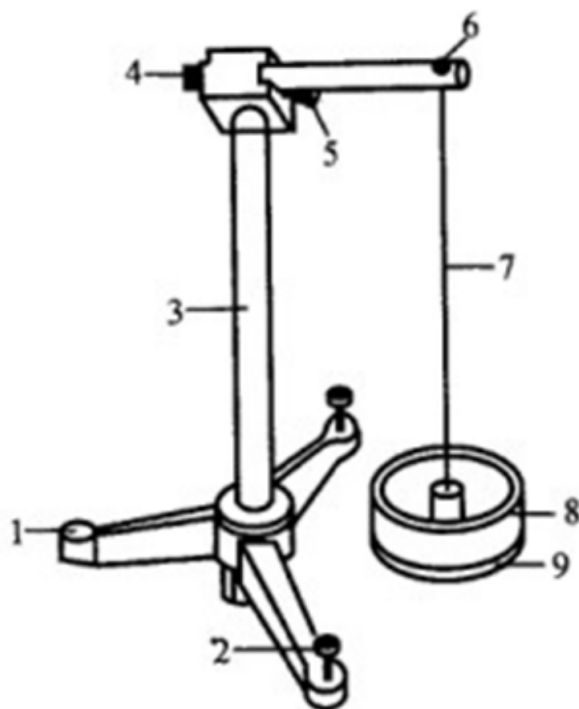


图 2: 扭摆示意图

3 实验结果与讨论

3.1 用扭摆测量切变模量

, 得到结果如表一所示。

表一 测量结果 1

测量次数	测量类型				
	钢丝直径 $d(\text{mm})$	时间 $t_0(N=30)(\text{s})$	时间 $t_1(N=30)(\text{s})$	圆环内径 $d(\text{mm})$	圆环外径 $d(\text{mm})$
1	0.770	67.54	109.49	83.72	103.96
2	0.769	67.50	109.58	83.74	103.88
3	0.763	67.51	109.60	83.76	103.92
4	0.770	67.49	109.62		
5	0.769	67.50	109.67		
6	0.770				
零点读数	-0.010				

表二 测量结果 2

扭转角度	5°	90°	180°	270°	360°
$t_0(\text{s})$	33.75	34.10	34.20	34.32	34.46
$t_1(\text{s})$	54.80	55.14	55.40	55.48	55.85

表三 计算结果

扭转角度	5°	90°	180°	270°	360°
切变模量 $/ \times 10^{10} \text{N/m}^2$	6.76	6.71	6.64	6.63	6.52

我们分别得到各个量的平均值：

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^6 d_i}{6} = 0.296 \text{mm} \quad (1)$$

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^3 l_i}{3} = 7.19 \text{cm} \quad (2)$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^3 D_i}{3} = 153.38 \text{cm} \quad (3)$$

$$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^3 L_i}{6} = 100.90 \text{cm} \quad (4)$$

我们由式？可以得到

$$b_i = \frac{2DL}{\pi l E} \cdot F_i = M F_i \quad (5)$$

其中 $M = \frac{2DL}{\pi l E}$ ，M 为一个常量，，做 $\bar{b}_i - F_i$ 图，M 为斜率，取 $g = 9.79 \text{m/s}^2$ 我们对 $F_i - b_i$ 图像线性拟合，得到结果如图 4 所示。我们得到的斜率为 $a = 3.1353 \times 10^{-3} \text{m/N}$ 则由式 7 我们得到

$$E = \frac{8DL}{\pi d^2 l a} = 1.9976 \times 10^{11} \text{N/m}^2 \quad (6)$$

3.1.1 标准不确定度分析^[2]

我们有式

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} \quad (7)$$

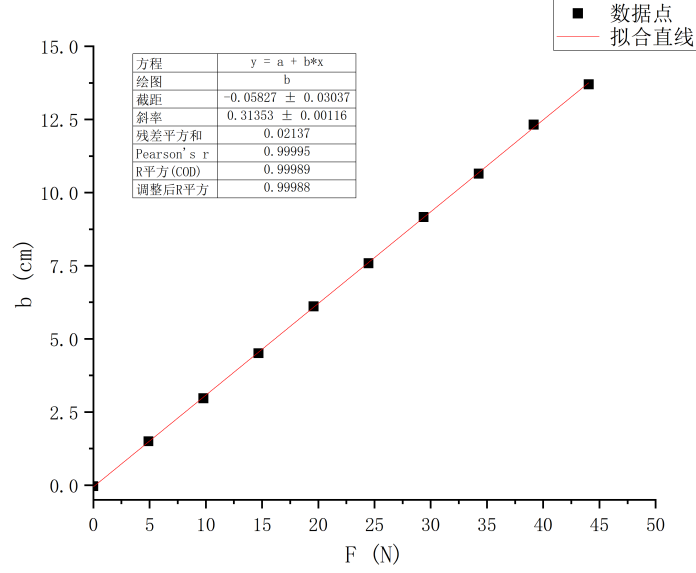


图 3: $b_i - F_i$

我们测量的 d 的不确定度为:

$$u_{d0} = \sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}} = 4.01 \times 10^{-7} m \quad (8)$$

千分尺的允差 $\Delta_t = 0.004 mm$ 则千分尺的标准不确定度为 $u_{d1} = \frac{\Delta_t}{3}$ 同时我们可以得到其标准不确定度

$$u_{dc} = \sqrt{u_{d0}^2 + u_{d1}^2} = 4.02 \times 10^{-6} \quad (9)$$

而对于钢卷尺, 由于未对齐产生的偏差经验上最大为 $\Delta_r = 0.2 cm$, 且认为该偏差符合正态分布则其产生的 B 类不确定度为 $u_1 = \frac{\Delta_r}{3} \approx 6.67 \times 10^{-4} m$ 则我们同样可以得到了, L 和 D 的标准不确定度。

$$u_{l0} = \sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2}{n(n-1)}} = 5.77 \times 10^{-5} m \quad (10)$$

$$u_{lc} = \sqrt{u_{l0}^2 + u_1^2} = 6.69 \times 10^{-4} m \quad (11)$$

$$u_{L0} = \sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^2}{n(n-1)}} = 5.77 \times 10^{-4} m \quad (12)$$

$$u_{Lc} = \sqrt{u_{L0}^2 + u_1^2} = 8.81 \times 10^{-4} m \quad (13)$$

$$u_{D0} = \sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n(n-1)}} = 4.41 \times 10^{-4} m \quad (14)$$

$$u_{Dc} = \sqrt{u_{D0}^2 + u_1^2} = 8.00 \times 10^{-4} m \quad (15)$$

接下来我们对由 $b_i - F_i$ 线性回归得到的斜率 a 的不确定度进行分析^[2]。根据文献 [2]，我们能够得到 b_i 的标准差 s_{b_i} 。

$$s_{b_i} = \sqrt{\frac{S}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum [b_i - \hat{b}]^2}{N-2}} = 2.67 \times 10^{-5} m \quad (16)$$

进一步的我们可以得到斜率 a 的不确定度

$$u_{a0} = s_a = \frac{s_{b_i}}{\sqrt{\sum (F_i - \bar{F})^2}} = 6.00 \times 10^{-7} m/N \quad (17)$$

我们使用钢板尺测量 b 其允差为 $\Delta_{r'} = 0.15mm$ ，可以看到其 A 类不确定度是较小的即 $s_{b_i} > \frac{1}{2} \cdot \Delta_{r'}$ ，即 A 类不确定度不在是其不确定度的主要分量，我们采用文献 [2] 的建议对斜率 a 的标准不确定度进行粗略估计

$$u_{ca} = \sqrt{u_{a0}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\Delta_{r'}}{2\|F_i - \bar{F}\|_{max}} \right)^2} = 1.52 \times 10^{-6} m/N \quad (18)$$

则我们可以得到 E 的标准不确定度为

$$u_{Ec} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)} \\ = \sqrt{\left(\frac{Eu_{Dc}}{D} \right)^2 + \left(\frac{Eu_{Lc}}{L} \right)^2 + \left(\frac{2Eu_{dc}}{d} \right)^2 + \left(\frac{Eu_{lc}}{l} \right)^2 + \left(\frac{Eu_{ac}}{a} \right)^2} \quad (19)$$

$$= 2.52 \times 10^9 N/m^2 \quad (20)$$

因此考虑标准不确定度钢丝的杨氏模量 E 可以写为

$$E = (2.00 \pm 0.02) \times 10^{11} N/m^2 \quad (21)$$

3.1.2 扩展不确定度分析

我们知道标准不确定度为式 13 由 Welch-Satterthwaite 公式我们可以知道有效自由度 ν_{eff} 为

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \quad (22)$$

其中 $u_c^2 y = \sum_{i=1}^N u_i^2(y)$, $u_i^2(y) = [c_i \cdot u(x_i)]^2$

$$\nu_{eff} = \frac{u_{dc}^4}{\frac{u_{d0}^4}{n-1} + \frac{u_{d1}^4}{\infty}} = 5.05 \times 10^4 \quad (23)$$

同理可以得到 $\nu_{eff}(D) = 22, \nu_{eff}(L) = 11, \nu_{eff}(l) = 3.61 \times 10^4$ 其中 a 的有效自由度 $\nu = N - 2$ 则同样都得到 $\nu_{eff}(a) = 330$ 我们可以得到 E 的有效自由度

$$\nu_{eff}(E) = \frac{u_{Ec}^4}{\sum_{i=1}^N \frac{(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i))^4}{\nu_i}} \quad (24)$$

$$= \frac{u_{Ec}^4}{\frac{(\frac{Eu_{Dc}}{D})^4}{\nu(D)} + \frac{(\frac{Eu_{Lc}}{L})^4}{\nu(L)} + \frac{(\frac{2Eu_{dc}}{d})^4}{\nu(d)} + \frac{(\frac{Eu_{lc}}{l})^4}{\nu(l)} + \frac{(\frac{Eu_{ac}}{a})^4}{\nu(b)}} \quad (25)$$

$$= 1.26 \times 10^5 m/s^2$$

查表得到 $k_{0.95} = 1.96$ 则扩展不确定度为

$$U_{Ep} = k_{0.95} \cdot u_{Ec} = 4.94 \times 10^9 N/m^2 \quad (26)$$

因此钢丝的杨氏模量考虑扩展不确定度可以写为

$$E = (2.00 \pm 0.05) \times 10^{11} N/m^2 \quad (27)$$

3.2 误差分析

由于仪器的限制及实验设计，操作影响，对于各个物理量的测量都存在误差。主要如下：

1. 钢丝长度 L、平面镜与标尺之间的距离 D 的值较大，在测量的过程中钢卷尺会发生弯曲，很难以准确的测量。
2. 光杠杆容易受到外界的影响，在实验中任何小失误都会对操作产生巨大的影响，是的读数产生误差。
3. 由于重物的悬挂使得钢丝产生微小长度形变和直径的变化，使得钢丝杨氏模量测量与实际差距较大。

3.3 其他实验方法讨论

我们也有其他的方法可以更加精确的测量到钢丝的杨氏模量，这里我们举出两种。

3.3.1 单缝衍射测弹性模量

单缝衍射测弹性模量^[3]，我们还是有：

$$E = \frac{2DLF}{Slb} = \frac{8DLF}{\pi d^2 lb}$$

但是我们通过衍射法进行实验，利用装置如图 单缝衍射形成的明暗条纹的近似规律为：

$$a = \frac{2\lambda f}{D} \quad (28)$$

其中，a 为单缝宽度，D 为中央名条纹的宽度，f 为单缝到光屏的距离在这个实验中缝宽由两片刀片组成，调节初始狭缝宽为 0.5mm。在托盘增加砝码，缝宽 a 减小如图，从而引起衍射条纹

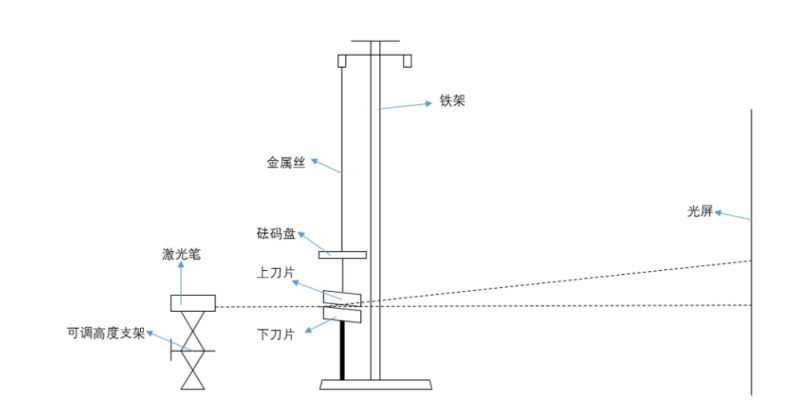


图 4: 衍射测弹性模量实验装置

变化。衍射条纹的宽度用 CCD 测量，由衍射条纹宽度 D 可以得到缝宽 a 的值，可以测得金属丝伸长量 ΔL 即

$$\Delta L = \|a_1 - a_2\| = 2\lambda f \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right) \quad (29)$$

$$E = \frac{FL}{S\Delta L} = \frac{2mgL}{\pi\lambda f} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \cdot d^2 \right)} \quad (30)$$

我们也可以通过单丝衍射得到金属丝的直径 d 与单缝衍射同理我们有关系

$$d = \frac{\lambda f}{D'} \quad (31)$$

我们可以由此式得到金属丝的横截面积，进一步的通过式 37 我们可以得到钢丝的杨氏模量 E 。

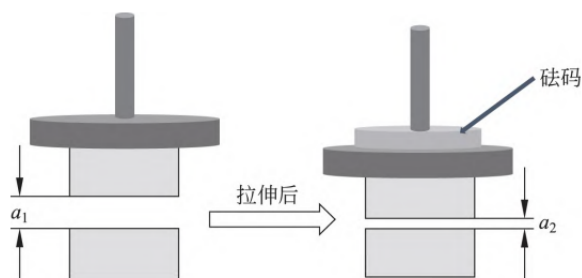


图 5: 刀片狭缝

3.3.2 双臂电桥测杨氏模量

在外力作用下金属丝长度边长，截面积几乎不变，电阻增大，利用非平衡电桥测量电阻的微小变化，得到金属丝的弹性模^[4]。我们同样还是有弹性形变公式，而金属丝的电阻和长度的变化

量又存在如下关系：

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta L}{S} \quad (32)$$

其中 ΔR 为金属丝的电阻变化量， ρ 为金属丝的电阻率，带入弹性形变公式我们有：

$$E = \frac{\rho FL}{\Delta R S^2} \quad (33)$$

而我们可以测的原始电阻，且满足如下式子

$$\Delta R_0 = \rho \frac{L}{S} \quad (34)$$

代入式子中我们可以得到

$$E = \frac{FR_0}{\Delta RS} = \frac{4FR_0}{\pi \Delta R d^2} \quad (35)$$

首先我们将 R_1, R_2 调节到相等，我们将金属丝两端接入电桥电路中的 R_r 如图，我们在调节电阻箱 R_3 使得 R_G 的示数为 0，此时电桥平衡可以得到 $R_3 = R_r$ 即为金属丝的电阻，从而通过式 42 得到钢丝的杨氏模量。

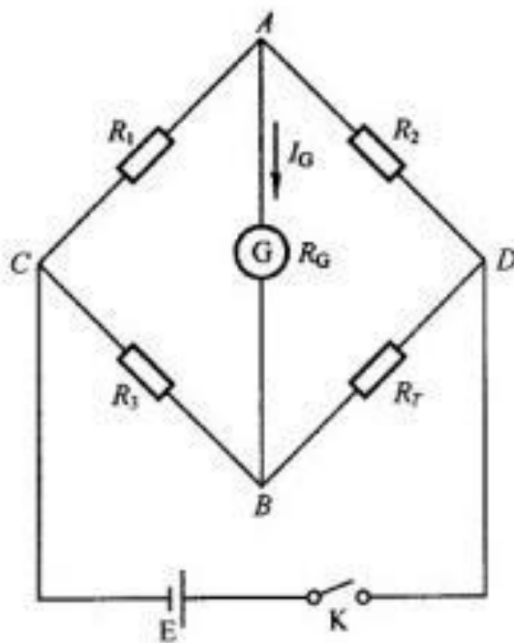


图 6: 双臂平衡电桥

4 结论

参考文献

- [1] 吕斯骅，段家祗. 新编基础物理实验. 高等教育出版社, 2006.

- [2] 费业泰. 误差理论和数据处理. 北京: 机械工业出版社, 2000.
- [3] 沙金巧, 杨俊义, 范君柳, and 樊丽娜. 利用衍射法自动测量金属的弹性模量. 物理与工程, 1(147-150), 2023.
- [4] 刘志亮. 用双臂电桥测金属丝杨氏模量的优化实验. 物理通报, 7(83-85), 2018.

附件

原始数据

刘昆承 91323070532

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei, Anhui. 230026 The People's Republic of China

第 11 页

$$= \sqrt{\left(\frac{G U_{dc}}{L}\right)^2 + \left(\frac{G U_{ac}}{m}\right)^2} + \left(\frac{2G d_{10} U_{dc}}{d_{10}^2 + d_{01}^2}\right)^2 + \left(\frac{2G d_{91} U_{dc}}{d_{91}^2 + d_{92}^2}\right)^2 + \left(\frac{9G U_{dc}}{\alpha}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{2G \bar{I}_1 U_{dc}}{N_1 (T_1^2 - T_0^2)}\right)^2$$

$$n(d_{10}^2 + d_{91}^2) \div \frac{16}{4} \cdot N$$

$$d^4 (T_1^2 - T_0^2)$$

$$N T_0 + \dots = N T_1$$

刘昆承 PB23020532

中国科学技术大学

第 12 页

SITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei, Anhui. 230026 The People's Republic of China

数据	1	2	3
(mm)	83.72	83.74	83.76

刘昆承 CPB23020532

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei, Anhui. 230026 The People's Republic of China

1 (N=30)

1	2	3	4	5
109.49	109.58	109.60	109.62	109.67

$$= 0.778 \text{ mm} = 7.78 \times 10^{-4} \text{ m}$$

昆承 PB23020532

中国科学技术大学

(N=15)
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Shanghai, 230026 The People's Republic of China

5°	90°	180°	270°	360°
54.80 54.80	34.10	34.20	34.32	34.46
55.14 55.14		55.40	55.48	55.85

$$\frac{cm(d_0^2 + d_1^2)}{d^4(t_1^2 - t_0^2)} \quad (*)$$