

钢丝杨氏模量的测量

作者：刘昆承，学号：PB23020532

摘要：

本文采用了拉伸法测量钢丝的杨氏模量，利用光杠杆光学放大法测量长度微小变化量，并通过最小二乘法和线性拟合提高结果的精度，在 1.2% 的精度下测得钢丝的杨氏模量为 $E = 2.00 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，其标准不确定度为 $U_{Ep} = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ，扩展不确定度为 $U_{Ep} = 5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ 。并分析了误差来源，并分析了几种其他的测量杨氏模量的方法。

关键词：

杨氏模量、光学放大、不确定度、最小二乘法、干涉法

1 引言^[1]

杨氏模量 (Young's modulus) 又称拉伸模量，是弹性模量的一种。杨氏模量是描述材料弹性性质的重要物理量之一，对于材料的工程应用和科学研究具有重要意义。本实验旨在通过测量材料在受力条件下的应变与应力之间的关系，从而确定杨氏模量。在材料弹性限度内，应力 $\frac{F}{S}$ 和应变 $\frac{\Delta L}{L}$ 之比为常数，即 $E = \frac{F/S}{\Delta L/L}$ ，其中 E 表示杨氏模量。杨氏模量是材料的重要力学性能参数之一，它不仅影响着材料在受力时的形变情况，还直接影响着材料的刚度和弹性特性。通过本实验的进行，我们了解了杨氏模量的多种测量方法，进一步认识材料的力学性能，学习了光学放大等实验方法并巩固了处理数据的方法。

2 实验内容与设计

2.1 实验仪器

弹性模量测量仪如图 1 所示，利用光放大法测量管制器的微小位移，从而得到钢丝的杨氏模量。

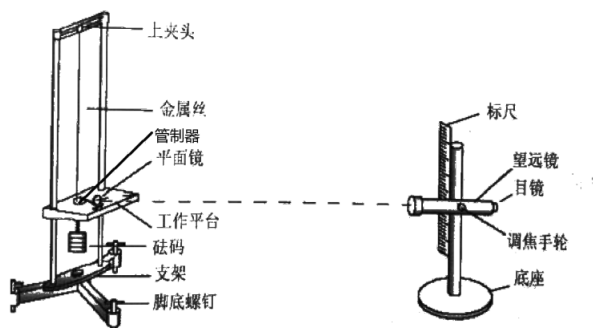


图 1: 弹性模量测量仪

2.2 实验内容与设计

2.2.1 实验原理

在材料弹性限度内，应力 $\frac{F}{S}$ 和应变 $\frac{\Delta L}{L}$ 之比为一个常数，即

$$E = \frac{F/S}{\Delta L/L} \quad (1)$$

其中 E 为材料的弹性模量，我们使用光杠杆来放大 ΔL ，如图光杠杆的足尖与被测物接触被测物下降一个微小 ΔL ，平面镜转过一个 θ 角，而此时入射光线与反射光线的夹角就为 2θ ，如图，当 θ 很小时我们近似有：

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{\Delta L}{l} \quad (2)$$

式子中 l 为支脚尖到刀口的垂直距离（光杠杆臂长）。并且我们有

$$\tan 2\theta \approx 2\theta = \frac{b}{D} \quad (3)$$

其中 D 为平面镜到标尺的距离， b 为下拉时表尺读数的改变。并且我们可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L}{l} &= \frac{b}{2D} \\ \Delta L &= \frac{bl}{2D} \end{aligned} \quad (4)$$

我们可以测出金属丝直径为 d ，得到 $S = \frac{\pi d^2}{4}$ 由这两式我们可以得到

$$E = \frac{2DLF}{Slb} = \frac{8DLF}{\pi d^2 lb} \quad (5)$$

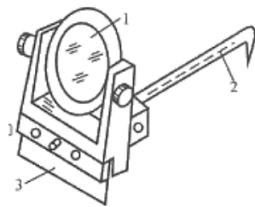


图 2

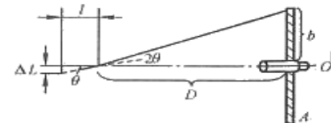


图 3

2.2.2 实验过程

调节仪器

1. 底部支架调节，使得平台水平
2. 光杠杆调节
3. 镜尺组的调节，使得标尺成像清晰

测量过程

1. 砝码托质量为 m_0 ，望远镜度数为 b_0 ，作为钢丝的起始长度

- 依次增加相同质量的砝码，记录表尺读数 b_i 再依次减去砝码记录下读数 b'_i ，得到平均值 $\bar{b}_i$
- 选用合适的仪器测量金属丝的长度 L ，平面镜与标尺的距离 D ，光杠杆的长度 l ，金属丝的直径 D

结果计算

我们有：

$$E = \frac{2DLF}{Slb} \quad (6)$$

我们可以将此式改写为：

$$b_i = \frac{2DLF_i}{SlE} = \frac{8DLF}{\pi d^2 l E} = MF_i \quad (7)$$

其中 $M = \frac{2DL}{SlE}$ ， M 为一个常量，，做 $\bar{b}_i - F_i$ 图， M 为斜率可以用最小二乘法线性拟合，并通过计算得到得到不确定度 u 。

3 实验结果与讨论

3.1 拉伸法测量钢丝的杨氏模量

我们在不同位置使用螺旋测微计测量 6 次钢丝的直径，使用卷尺分别测量 3 次光杠杆长度 l ，钢丝长度 L 和标尺与平面镜的距离 D ，得到结果如表一所示。

表一 测量结果 1

测量次数	测量类型			
	钢丝直径 $d(\text{mm})$	光杠杆长 $l(\text{cm})$	钢丝长度 $L(\text{cm})$	标尺距离 D
1	0.290	7.20	100.90	153.40
2	0.288	7.18	101.00	153.45
3	0.290	7.19	100.80	153.30
4	0.289			
5	0.288			
6	0.288			
零点读数	-0.007			

我们在托盘上逐渐加上 $m = 500g$ 的砝码，用望远镜观察标尺，标尺读数为 b_i ，然后再依次减去砝码记下对应读数 b'_i ，两组数据的平均值为 $\bar{b}_i$ 得到结果如表二。

表二 测量结果 2

砝码个数 i	砝码总质量 m_i (kg)	标尺读数 b_i (c)	标尺读数 b'_i (cm)	平均读数 $\bar{b}_i$ (cm)
0	0	0.00	-0.07	-0.04
1	500	1.49	1.51	1.50
2	1000	2.94	3.00	2.97
3	1500	4.49	4.53	4.51
4	2000	6.12	6.10	6.11
5	2500	7.57	7.60	7.58
6	3000	9.03	9.30	9.16
7	3500	10.60	10.70	10.65
8	4000	12.25	12.40	12.32
9	4500	13.70	13.70	13.70

我们分别得到各个量的平均值:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^6 d_i}{6} = 0.296mm \quad (8)$$

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^3 l_i}{3} = 7.19cm \quad (9)$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^3 D_i}{3} = 153.38cm \quad (10)$$

$$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^3 L_i}{6} = 100.90cm \quad (11)$$

我们由式 7 可以得到

$$b_i = \frac{2DL}{SLE} \cdot F_i = MF_i \quad (12)$$

其中 $M = \frac{2DL}{SLE}$, M 为一个常量,, 做 $\bar{b}_i - F_i$ 图, M 为斜率, 取 $g = 9.79m/s^2$ 我们对 $F_i - b_i$ 图像线性拟合, 得到结果如图 4 所示。我们得到的斜率为 $a = 3.1353 \times 10^{-3}m/N$ 则由式 7 我们得到

$$E = \frac{8DL}{\pi d^2 la} = 1.9976 \times 10^{11}N/m^2 \quad (13)$$

3.1.1 标准不确定度分析^[2]

我们有式

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} \quad (14)$$

我们测量的 d 的不确定度为:

$$u_{d0} = \sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}} = 4.01 \times 10^{-7}m \quad (15)$$

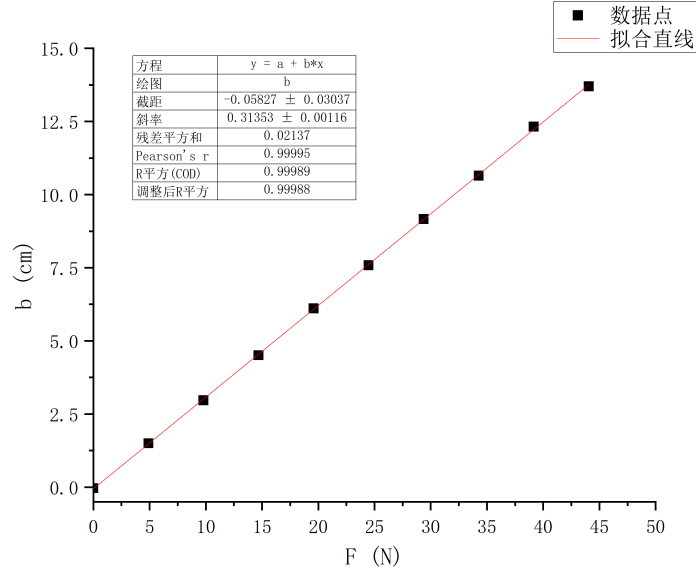


图 4: $b_i - F_i$

千分尺的允差 $\Delta_t = 0.004mm$ 则千分尺的标准不确定度为 $u_{d1} = \frac{\Delta_t}{3}$ 同时我们可以得到其标准不确定度

$$u_{dc} = \sqrt{u_{d0}^2 + u_{d1}^2} = 4.02 \times 10^{-6} \quad (16)$$

而对于钢卷尺，由于未对齐产生的偏差经验上最大为 $\Delta_r = 0.2cm$ ，且认为该偏差符合正态分布则其产生的 B 类不确定度为 $u_1 = \frac{\Delta_r}{3} \approx 6.67 \times 10^{-4}m$ 则我们同样可以得到了，L 和 D 的标准不确定度。

$$u_{l0} = \sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2}{n(n-1)}} = 5.77 \times 10^{-5}m \quad (17)$$

$$u_{lc} = \sqrt{u_{l0}^2 + u_1^2} = 6.69 \times 10^{-4}m \quad (18)$$

$$u_{L0} = \sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^2}{n(n-1)}} = 5.77 \times 10^{-4}m \quad (19)$$

$$u_{Lc} = \sqrt{u_{L0}^2 + u_1^2} = 8.81 \times 10^{-4}m \quad (20)$$

$$u_{D0} = \sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n(n-1)}} = 4.41 \times 10^{-4}m \quad (21)$$

$$u_{Dc} = \sqrt{u_{D0}^2 + u_1^2} = 8.00 \times 10^{-4}m \quad (22)$$

接下来我们对由 $b_i - F_i$ 线性回归得到的斜率 a 的不确定度进行分析^[2]。根据文献 [2]，我们能够得到 b_i 的标准差 s_{b_i} 。

$$s_{b_i} = \sqrt{\frac{S}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum [b_i - \hat{b}]^2}{N-2}} = 2.67 \times 10^{-5} m \quad (23)$$

进一步的我们可以得到斜率 a 的不确定度

$$u_{a0} = s_a = \frac{s_{b_i}}{\sqrt{\sum (F_i - \bar{F})^2}} = 6.00 \times 10^{-7} m/N \quad (24)$$

我们使用钢板尺测量 b 其允差为 $\Delta_{r'} = 0.15mm$ ，可以看到其 A 类不确定度是较小的即 $s_{b_i} > \frac{1}{2} \cdot \Delta_{r'}$ ，即 A 类不确定度不是其不确定度的主要分量，我们采用文献 [2] 的建议对斜率 a 的标准不确定度进行粗略估计

$$u_{ca} = \sqrt{u_{a0}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\Delta_{r'}}{2\|F_i - \bar{F}\|_{max}} \right)^2} = 1.52 \times 10^{-6} m/N \quad (25)$$

则我们可以得到 E 的标准不确定度为

$$u_{Ec} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)} \\ = \sqrt{\left(\frac{Eu_{Dc}}{D} \right)^2 + \left(\frac{Eu_{Lc}}{L} \right)^2 + \left(\frac{2Eu_{dc}}{d} \right)^2 + \left(\frac{Eu_{lc}}{l} \right)^2 + \left(\frac{Eu_{ac}}{a} \right)^2} \quad (26)$$

$$= 2.52 \times 10^9 N/m^2 \quad (27)$$

因此考虑标准不确定度钢丝的杨氏模量 E 可以写为

$$E = (2.00 \pm 0.02) \times 10^{11} N/m^2 \quad (28)$$

3.1.2 扩展不确定度分析

我们知道标准不确定度为式 13 由 Welch-Satterthwaite 公式我们可以知道有效自由度 ν_{eff} 为

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \quad (29)$$

其中 $u_c^2 y = \sum_{i=1}^N u_i^2(y)$, $u_i^2(y) = [c_i \cdot u(x_i)]^2$

$$\nu_{eff} = \frac{u_{dc}^4}{\frac{u_{d0}^4}{n-1} + \frac{u_{d1}^4}{\infty}} = 5.05 \times 10^4 \quad (30)$$

同理可以得到 $\nu_{eff}(D) = 22, \nu_{eff}(L) = 11, \nu_{eff}(l) = 3.61 \times 10^4$ 其中 a 的有效自由度 $\nu = N - 2$ 则同样都得到 $\nu_{eff}(a) = 330$ 我们可以得到 E 的有效自由度

$$\nu_{eff}(E) = \frac{u_{Ec}^4}{\sum_{i=1}^N \frac{(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i))^4}{\nu_i}} \quad (31)$$

$$= \frac{u_{Ec}^4}{\frac{(\frac{Eu_{Dc}}{D})^4}{\nu(D)} + \frac{(\frac{Eu_{Lc}}{L})^4}{\nu(L)} + \frac{(\frac{2Eu_{dc}}{d})^4}{\nu(d)} + \frac{(\frac{Eu_{lc}}{l})^4}{\nu(l)} + \frac{(\frac{Eu_{ac}}{a})^4}{\nu(b)}} \\ = 1.26 \times 10^5 m/s^2 \quad (32)$$

查表得到 $k_{0.95} = 1.96$ 则扩展不确定度为

$$U_{Ep} = k_{0.95} \cdot u_{Ec} = 4.94 \times 10^9 N/m^2 \quad (33)$$

因此钢丝的杨氏模量考虑扩展不确定度可以写为

$$E = (2.00 \pm 0.05) \times 10^{11} N/m^2 \quad (34)$$

3.2 误差原因分析

由于仪器的限制及实验设计，操作影响，对于各个物理量的测量都存在误差。主要如下：

1. 钢丝长度 L 、平面镜与标尺之间的距离 D 的值较大，在测量的过程中钢卷尺会发生弯曲，很难以准确的测量。
2. 光杠杆容易受到外界的影响，在实验中任何小失误都会对操作产生巨大的影响，是的读数产生误差。
3. 由于重物的悬挂使得钢丝产生微小长度形变和直径的变化，使得钢丝杨氏模量测量与实际差距较大。

3.3 其他实验方法讨论

我们也有其他的方法可以更加精确的测量到钢丝的杨氏模量，这里我们举出两种。

3.3.1 单缝衍射测弹性模量

单缝衍射测弹性模量^[3]，我们还是有：

$$E = \frac{2DLF}{Slb} = \frac{8DLF}{\pi d^2 lb}$$

但是我们通过衍射法进行实验，利用装置如图 单缝衍射形成的明暗条纹的近似规律为：

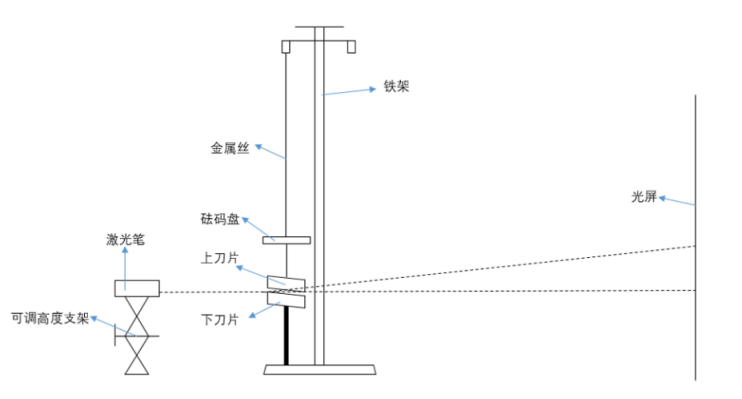


图 5: 衍射测弹性模量实验装置

$$a = \frac{2\lambda f}{D} \quad (35)$$

其中， a 为单缝宽度， D 为中央明条纹的宽度， f 为单缝到光屏的距离在这个实验中缝宽由两片刀片组成，调节初始狭缝宽为 0.5mm 。在托盘增加砝码，缝宽 a 减小如图，从而引起衍射条纹变化。衍射条纹的宽度用 CCD 测量，由衍射条纹宽度 D 可以得到缝宽 a 的值，可以测得金属丝伸长量 ΔL 即

$$\Delta L = \|a_1 - a_2\| = 2\lambda f \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right) \quad (36)$$

$$E = \frac{FL}{S\Delta L} = \frac{2mgL}{\pi\lambda f} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right) \cdot d^2} \quad (37)$$

我们也可以通过单丝衍射得到金属丝的直径 d 与单缝衍射同理我们有关系

$$d = \frac{\lambda f}{D'} \quad (38)$$

我们可以由此式得到金属丝的横截面积，进一步的通过式 37 我们可以得到钢丝的杨氏模量 E 。

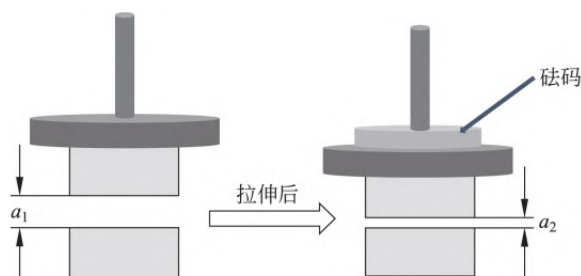


图 6: 刀片狭缝

3.3.2 双臂电桥测杨氏模量

在外力作用下金属丝长度边长，截面积几乎不变，电阻增大，利用非平衡电桥测量电阻的微小变化，得到金属丝的弹性模^[4]。我们同样还是有弹性形变公式，而金属丝的电阻和长度的变化量又存在如下关系：

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta L}{S} \quad (39)$$

其中 ΔR 为金属丝的电阻变化量， ρ 为金属丝的电阻率，带入弹性形变公式我们有：

$$E = \frac{\rho FL}{\Delta R S^2} \quad (40)$$

而我们可以测的原始电阻，且满足如下式子

$$\Delta R_0 = \rho \frac{L}{S} \quad (41)$$

代入式子中我们可以得到

$$E = \frac{FR_0}{\Delta R S} = \frac{4FR_0}{\pi \Delta R d^2} \quad (42)$$

首先我们将 R_1, R_2 调节到相等, 我们将金属丝两端接入电桥电路中的 R_r 如图, 我们在调节电阻箱 R_3 使得 R_G 的示数为 0, 此时电桥平衡可以得到 $R_3 = R_r$ 即为金属丝的电阻, 从而通过式 42 得到钢丝的杨氏模量。

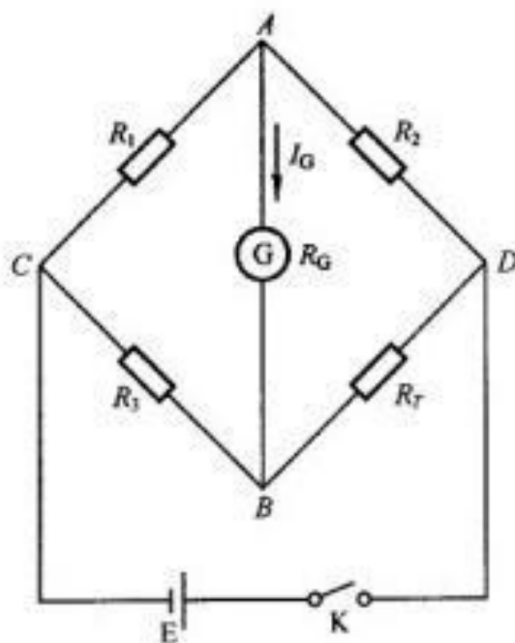


图 7: 双臂平衡电桥

4 结论

文基于拉伸法利用光学放大等原理测量了钢丝, 测量结果为: $E = 1.9976 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 。其标准不确定度为 $U_{Ep} = 2.52 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 扩展不确定度为 $U_{Ep} = 4.94 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ 。我们在这个实验中了解到了, 弹性模量的物理意义, 光杠杆, 弹性模量测量仪的工作原理。整体看来, 实验结果是具有较高的可信度的。并对材料的力学性质提供了重要参考。我们在这个实验中了解到了, 弹性模量的物理意义, 光杠杆, 弹性模量测量仪的工作原理。报告中还提到了两种其他的测量杨氏模量的方法, 根据文献^{[3][4]}, 这两种测量方法相较于光放大法具更高的精度。在未来的研究中可以采用其进一步优化实验方法, 提高实验精度, 以获得更加准确的杨氏模量数值。

参考文献

- [1] 吕斯骅, 段家祗. 新编基础物理实验. 高等教育出版社, 2006.
- [2] 费业泰. 误差理论和数据处理. 北京: 机械工业出版社, 2000.
- [3] 沙金巧, 杨俊义, 范君柳, and 樊丽娜. 利用衍射法自动测量金属的弹性模量. 物理与工程, 1(147-150), 2023.
- [4] 刘志亮. 用双臂电桥测金属丝杨氏模量的优化实验. 物理通报, 7(83-85), 2018.

附件

原始数据

中国科学技术大学

刘昆承 PB23020532

钢丝直径 d .

测量次数	1	2	3	4 5	6	7
测微计示数	0.290mm	0.288mm	0.290mm	0.289mm	0.288mm	0.288mm
零点读数	0.027mm 0.007mm					

测量量 l .

测量次数	1	2	3
l	7.20cm	7.18cm	7.19cm

钢丝长度 L .

测量次数	1	2	3
L	100.90cm	101.00cm	100.80cm

距离 D .

测量次数	1	2	3
D	153.40cm	153.45cm	153.30cm

杨欣阳
4.29

b.

砝码质量	0	500g	1000g	1500g	2000g
测量次数	1	2	3	4	5
指示数	0.00cm	1.49cm	2.94cm	4.49cm	6.12cm

续

砝码质量	2500g	3000g	3500g	4000g	4500g
指示数	7.57cm	9.03cm	10.60cm	12.25cm	13.70cm

1101C-08 201412-2500

图 8: 原始数据 1

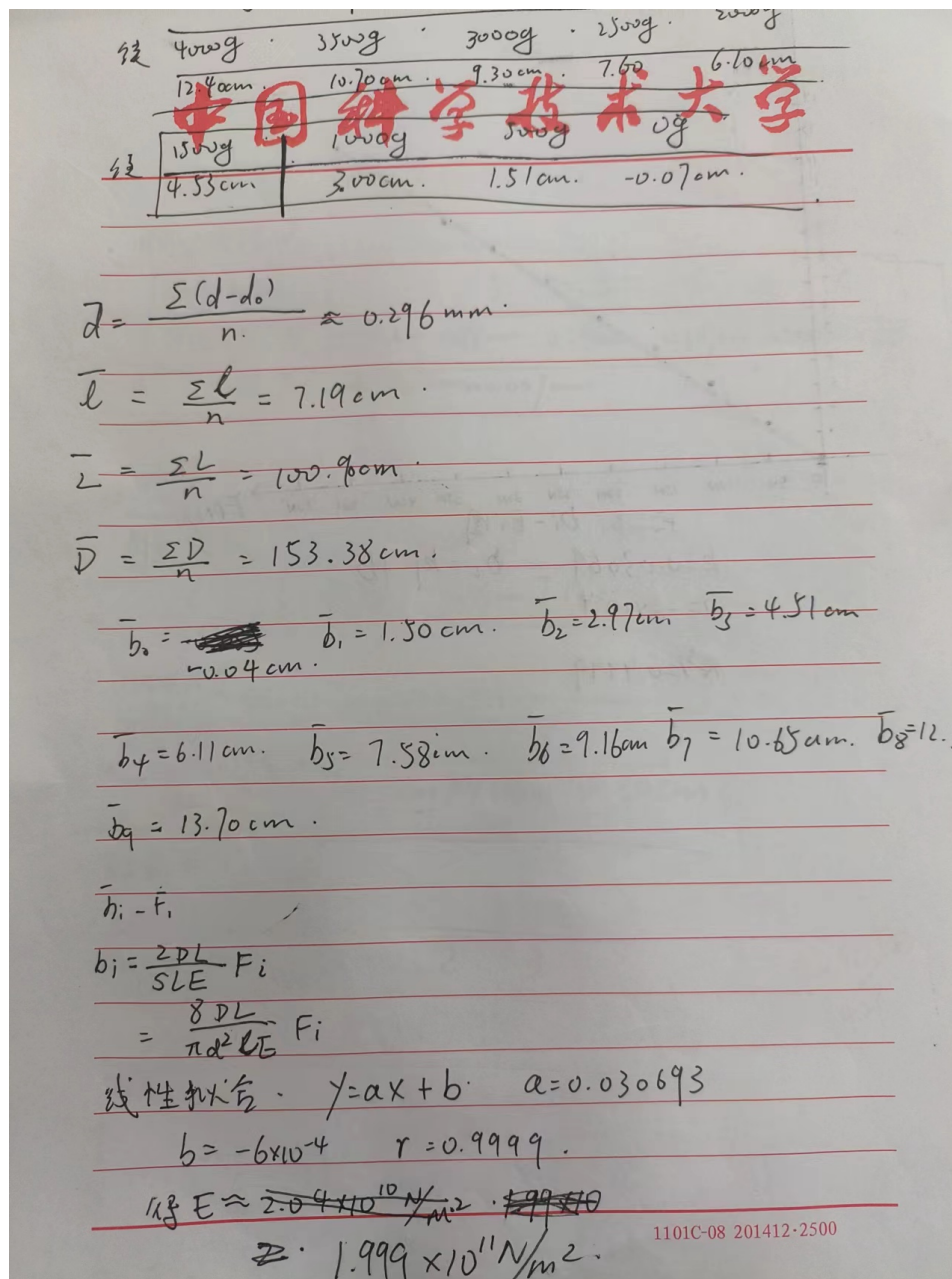


图 9: 原始数据 2