

# 磁力摆实验报告

作者：刘昆承，学号：PB23020532

## 摘要：

本实验研究了亥姆霍兹线圈内部磁场规律，得到亥姆霍兹线圈内部磁场规律满足  $B = kI$ ，通过线性拟合得到  $k = 4.93 \times 10^{-3} T/A$ ， $k$  的不确定度为  $u_{kc} = 2.9 \times 10^{-2} mT$  测得局域地磁场的水平分量  $B_0 = 3.88 \times 10^{-5} T$  比较磁力摆在地磁场中的运动，磁力摆的转动惯量和磁矩分别为  $J_0 = 1.04 \times 10^{-6} kg \cdot m^2$ ， $m = 1.07 A/m^2$  研究两个磁力摆的耦合规律得到  $\omega > \omega^* > \omega_0$ ，并且随着两个小磁针距离  $L$  的增加，拍频也随之变缓。进一步的通过线性拟合得到耦合关系  $k' = \alpha \cdot \frac{m^2}{L^\beta} = \frac{1}{2} \|\omega^2 - \omega^{*2}\|$  中  $\beta = 2.69$ ， $\alpha = 3.06 \times 10^{-2} A^{-1} \cdot s^{-2}$ 。

## 关键词：

磁力摆 亥姆霍兹线圈 地磁场水平分量 磁矩 转动惯量耦合规律

## 1 引言

磁力摆是一种经典的实验装置<sup>[1]</sup>，用于研究磁场的性质和小磁针在外部磁场中的运动规律。通过将小磁针悬挂在一个稳定的支架上，并放置在外部磁场中，我们可以观察到小磁针的摆动行为，并从中推测出磁场的强度和方向。磁力摆实验的原理基于磁矩在外部磁场中受力的作用。当一个小磁针被放置在磁场中时，它的磁矩会与外部磁场相互作用，产生一个力矩使其发生转动。这个转动过程可以被观察到，并且可以用来研究磁场的特性。通过对磁力摆的实验研究，我们可以探索磁场的分布、磁场强度的测量以及小磁针在外部磁场中的运动规律和耦合规律。实验结果不仅对于磁学理论的验证和深入理解具有重要意义，也为应用磁场的技术和设备提供了实验数据和理论支持。

## 2 实验内容与设计

### 2.1 实验仪器

实验使用的亥姆霍兹线圈如图1，磁力摆如图2，直流电源、高灵敏度特斯拉计

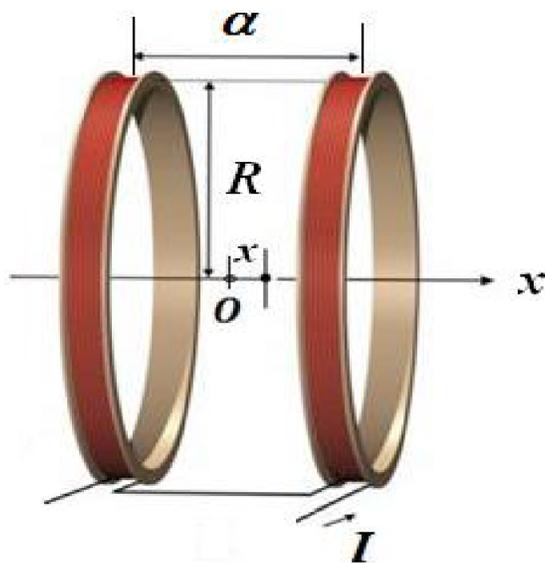


图 1: 亥姆霍兹线圈

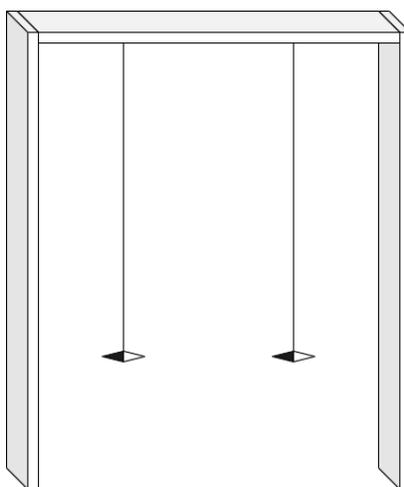


图 2: 磁力摆

## 2.2 实验内容与设计

### 2.2.1 实验内容

#### 1. 基础实验

- (a) 测量亥姆霍兹线圈线圈内部磁场，得到亥姆霍兹线圈内部磁场分布。
- (b) 通过磁力摆测量局域地磁场水平分量

#### 2. 提升实验

- (a) 观察小磁针在磁场中的运动特性
- (b) 测量小磁针的磁矩和转动惯量

### 3. 进阶实验

- (a) 研究小磁针耦合运动特性
- (b) 研究小磁针的耦合运动规律

#### 2.2.2 实验原理

测量亥姆霍兹线圈线圈内部磁场

亥姆霍兹线圈是一对彼此平行且连通的共轴圆形线圈组，每组  $N$  匝，两组线圈内的电流方向一致。当半径为  $R$  时，两个线圈中点附近可以近似为匀强磁场。我们可以得到其中心的磁场强度为

$$B = kI \quad (1)$$

我们可以通过测量得到电流  $I$  与磁场强度  $B$  的线性关系。

磁力摆测局域地磁场

对于一个磁力摆来说在磁场中，如图3。偏离平衡位置  $\theta < 5^\circ$  时，有受到磁力的回复力做类似单摆运动。有运动方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mB}{J} \cdot \theta \quad (2)$$

其中  $m$  是磁力摆的磁矩， $J$  是磁力摆的转动惯量， $B$  是磁力摆所处位置的磁感应强度。由于  $\theta$  较小，我们可以一级近似得到

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB}} \quad (3)$$

我们将亥姆霍兹线圈放置使得其产生的磁场  $B$  与地磁场  $B_0$  方向相同，我们可以进一步得到

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m(B + B_0)}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{T^2} = \frac{m \cdot kI}{4\pi^2 J} + \frac{mB_0}{4\pi^2 J} \quad (5)$$

我们可以通过线性拟合得到局域地磁场  $B_0$

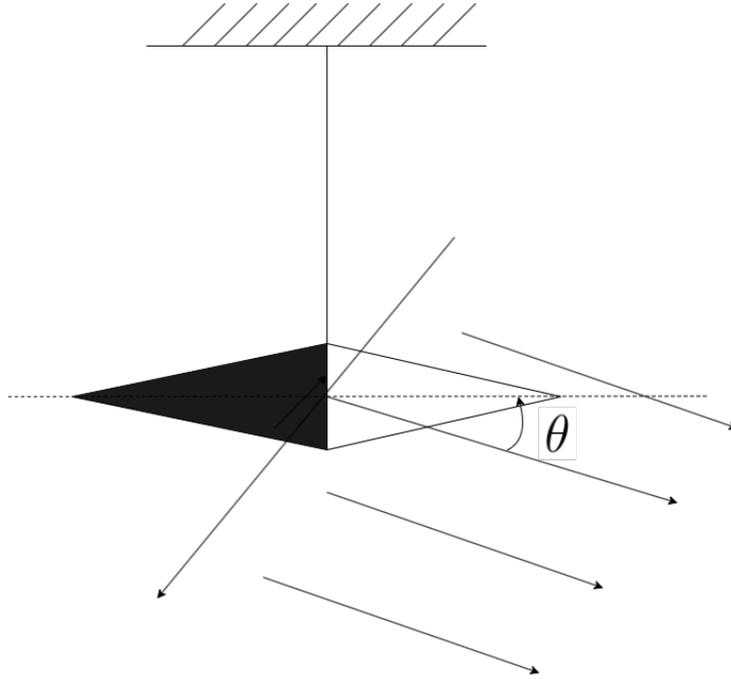


图 3: 磁力摆在磁场中受力

#### 测量小磁针的磁矩和转动惯量

在前一个实验中我们得到了地磁场  $B_0$ ，在地磁场中观察磁力摆的运动规律我们还是有式3 我们在转动惯量为  $J_0$  磁力摆的两端加上转动惯量为  $J'$  的重物，则磁力摆的周期公式可以写为：

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + J'}{mB_0}} \quad (6)$$

通过与式3、6联立我们可以解得磁力摆的转动惯量  $J_0$  和其磁矩  $m$ 。

#### 两个小磁针的耦合运动规律 J

两个小磁针如图4所示，我们对两个小磁针进行受力分析，我们可以列出两个小磁针受力的微分方程。

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{\mu_0 m^2}{4\pi J_0 L^3}(2\theta_1 + \theta_2) - \frac{mB_0}{J_0} \cdot \theta_1 \quad (7)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{\mu_0 m^2}{4\pi J_0 L^3}(2\theta_2 + \theta_1) - \frac{mB_0}{J_0} \cdot \theta_2 \quad (8)$$

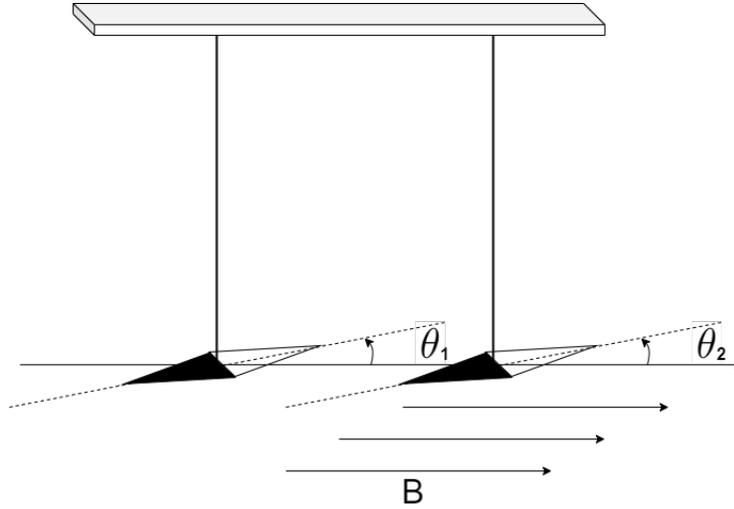


图 4: 两个小磁针在磁场中耦合

我们知道在耦合振动, 我们记同向振动角速度为  $\omega$ , 反向振动角速度为  $\omega^*$ , 则我们可以得到

$$f_p = \frac{\|\omega - \omega^*\|}{2\pi} \quad (9)$$

$f_p$  为拍频, 其中耦合系数为

$$k' = \alpha \cdot \frac{m^2}{L^\beta} = \frac{1}{2} \|\omega^2 - \omega^{*2}\| \quad (10)$$

我们记  $k = \frac{mB_0}{J_0} = \omega_0$ ,  $k' = \frac{\mu_0 m^2}{4\pi J_0 L^2}$ 。通过解方程7、8我们可以得到两个解,

$$\omega = \sqrt{k + 3k'} \quad (11)$$

$$\omega^* = \sqrt{k + k'} \quad (12)$$

故我们可以理论计算得到式10中的  $\beta = 3$ ,  $\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi J_0}$

在实验中我们可以测得两个小磁针同向振动和反向振动的角速度, 同时我们由式10 两边同时取对数则可以得到

$$\ln k' = -\beta \ln L + \ln(\alpha \cdot m^2) \quad (13)$$

我们可以测定不同  $L$  下的  $\omega$ 、 $\omega^*$ , 再线性拟合得到各系数

## 3 实验结果与讨论

### 3.1 实验结果

#### 3.1.1 亥姆霍兹线圈的磁场测定

将亥姆霍兹线圈垂直于地磁场水平分量用特斯拉计测亥姆霍兹线圈中的磁场, 得到结果如表1所示。放置, 再恒流电源上设置不同电流, 再使

表 1: 亥姆霍兹线圈中的磁场

实验次数	线圈电流 $I(A)$	磁场大小 $B(mT)$
1	0.1	0.50
2	0.2	0.96
3	0.3	1.46
4	0.4	1.96
5	0.5	2.46
6	0.6	2.94
7	0.7	3.44
8	0.8	3.94

我们通过对数据线性拟合,可以得到如图5的结果,由式1我们可以得到  $B = kI$  中的  $k$  为线性拟合斜率为  $k = 4.93 \times 10^{-3} T/A$

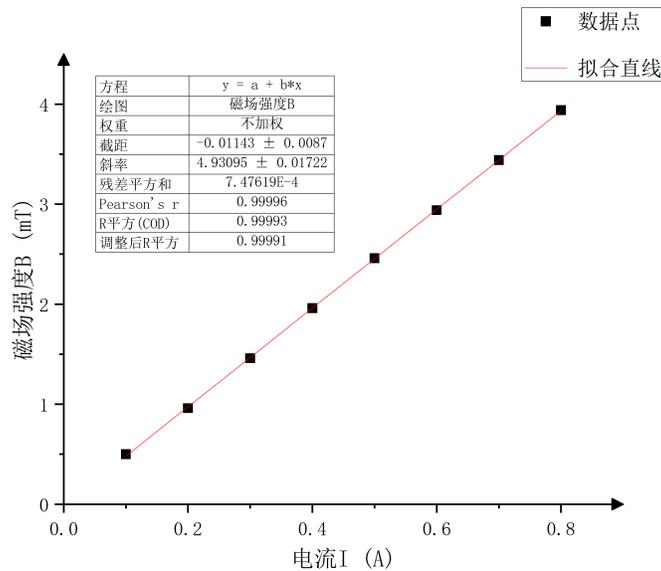


图 5: 亥姆霍兹线圈线性拟合结果

### 3.1.2 局域地磁场水平分量的测定

我们给亥姆霍兹线圈通上电流,改变电流大小,让磁力摆在磁场中振动起来,我们可以测得周期,得到一组电流和周期的关系如表2由式5知道,  $\frac{1}{T^2}$  和  $I$  成线性关系,我们对结果线性拟合如图6,其斜率为  $a = 134.64$ , 截距  $b = 1.06$  对照式5,  $\frac{1}{T^2} = \frac{m \cdot k I}{4\pi^2 J} + \frac{m B_0}{4\pi^2 J}$ , 我们有

$$\frac{m}{4\pi^2 J_0} = \frac{a}{k} \tag{14}$$

$$\frac{m B_0}{4\pi^2 J_0} = b \tag{15}$$

可以解得  $B_0 = 3.88 \times 10^{-5} T$

表 2: 磁力摆在亥姆霍兹线圈中的周期

实验次数	线圈电流 $I(A)$	振动时间 $(N=60)t(s)$
1	0.000	59.56
2	0.010	38.78
3	0.015	33.95
4	0.020	31.08
5	0.025	28.40
6	0.030	26.45
7	0.035	24.81
8	0.040	23.77
9	0.045	22.61
10	0.050	21.46

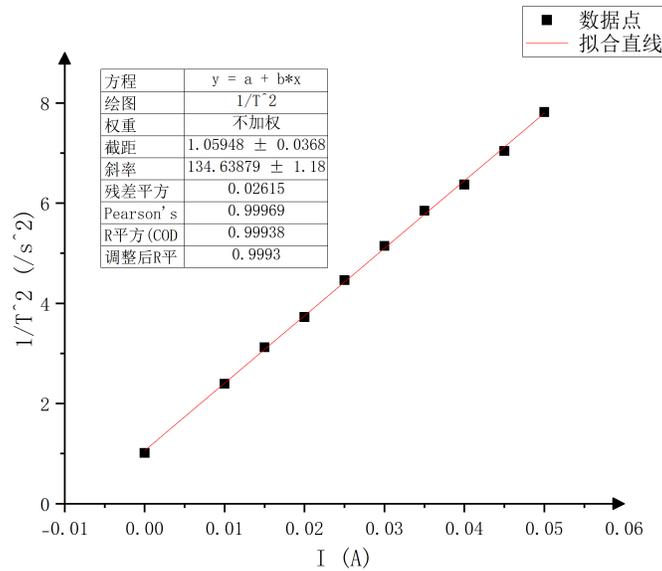


图 6: 磁力摆  $\frac{1}{T^2}$ - $I$  线性拟合结果

### 3.1.3 磁力摆转动惯量和磁矩的测量

在磁力摆的两端加上两个螺母，称得质量为  $m_1 = 0.71g$ ,  $m_2 = 0.67g$ ，将螺母放到磁力摆上，测量螺母质心到转动中心的距离为  $r_1 = r_2 = 2.50cm$  可以测得磁力摆加上两个螺母，和未加两个螺母振动的 60 个周期的时间，结果如表3 由我们解得的  $B_0 = 3.88 \times 10^{-5} T$ ，而  $J' = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 8.62 \times 10^{-7} kg \cdot m^2$  我们通过式3、6， $T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{mB_0}}$ ， $T' = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J'}{mB_0}}$  可以解得

$$J_0 = 1.04 \times 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m}^2, m = 1.07 \text{A}/\text{m}^2$$

表 3: 磁力摆的磁矩和转动惯量

测量类型	时间 $t(s)$ ( $N = 60$ )
未加 $m_1$ 、 $m_2$	59.56
加上 $m_1$ 、 $m_2$	80.60

### 3.1.4 两个小磁针的耦合运动规律

改变两个小磁针的距离，分别同向反向振动我们可以得到结果如表4

表 4: 磁力摆耦合运动

测量次数	测量类型		
	距离 ( $L(\text{cm})$ )	t 同向时间 $t(s)$ , ( $N = 40$ )	反向时间 $t(s)$ , ( $N = 40$ )
1	15.30	20.46	30.60
2	16.30	23.08	31.14
3	19.50	26.91	33.99
4	24.00	32.19	36.96
5	27.00	34.35	38.53
6	30.00	36.00	39.50

我们由式13, 线性拟合结果如图7可以知道  $\beta = 2.69$ ,  $\ln(\alpha m^2) = -3.35$  得到  $\alpha = 3.06 \times 10^{-2} \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ , 与由13 理论计算的结果  $\beta = 3$ , 对比发现  $\beta$  的测量值与理论之接近, 说明偶极子模型是合理的。

并且我们比较  $\omega$ ,  $\omega^*$  和  $\omega_0$  的大小我们知道  $\omega > \omega^* > \omega_0$ , 其中  $\omega$  为两个小磁针同向运动的角速度,  $\omega^*$  为两个小磁针反向运动的角速度,  $\omega_0$ , 为单个小磁针在地磁场振动的角速度。

并且还能知道随着两个小磁针距离  $L$  的增加, 拍频也随之变缓。

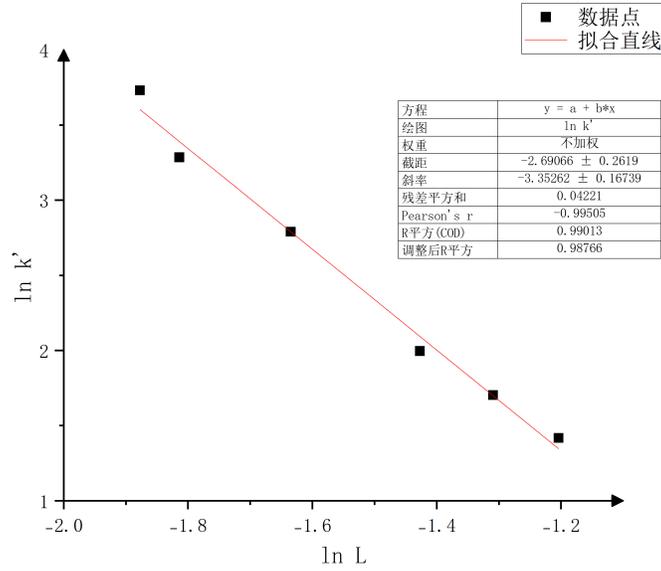


图 7: 磁力摆  $\frac{1}{T^2}-I$  性拟合结果

### 3.2 不确定度分析

#### 3.2.1 亥姆霍兹线圈中的磁场不确定度

接下来我们对由  $B_I$  线性回归得到的斜率  $a$  的不确定度进行分析<sup>[2]</sup>。根据文献，我们能够得到  $T_i$  的标准差  $s_{T_i}$ 。

$$s_{T_i} = \sqrt{\frac{S}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [T_i - \hat{T}]^2}{N-2}} \quad (16)$$

$$= \sqrt{\frac{(0.50 - 0.49)^2 + (0.96 - 0.49 \times 2)^2 + \dots + (3.94 - 8 \times 0.49)^2}{8-2}} mT = 1.41 \times 10^{-2} mT \quad (17)$$

进一步的我们可以得到斜率  $a$  的 A 类不确定度

$$u_{k0} = s_k = \frac{s_{T_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (I_i - \bar{I})^2}} \quad (18)$$

$$= \frac{1.41 \times 10^{-2}}{\sqrt{(0.1 - 0.45)^2 + \dots + (0.8 - 0.45)^2}} mT/A = 1.51 \times 10^{-2} mT/A \quad (19)$$

由于高精度特斯拉计的最大允差为  $\Delta_t = 0.01 mT$ ，我们采用文献<sup>[2]</sup>的建议对斜率  $a$  的标准不确定度进行粗略估计

$$u_{kc} = \sqrt{u_{k0}^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Delta_t}{|I_i - \bar{I}|_{max}} \right)^2} = \sqrt{0.015^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{0.01}{|0.8 - 0.45|} \right)^2} mT = 2.9 \times 10^{-2} mT \quad (20)$$

则  $B = kI$  中的系数最终可以表示为  $k = (4.93 \pm 0.03) \times 10^{-3} T/A$

## 4 结论

本实验研究了亥姆霍兹线圈内部磁场规律，得到亥姆霍兹线圈内部中点磁场规律满足  $B = kI$ ，通过线性拟合得到  $k = 4.93 \times 10^{-3} T/A$   $k$  的标准不确定度为  $u_{kc} = 2.9 \times 10^{-2} mT$  通过得到的亥姆霍兹线圈磁场规律，改变电流观察磁力摆在磁场中运动规律，利用  $\frac{1}{T^2} = \frac{m \cdot kI}{4\pi^2 J} + \frac{mB_0}{4\pi^2 J}$  中  $\frac{1}{T^2}$  和  $I$  成线性关系，我们得到局域地磁场的水平分量  $B_0 = 3.88 \times 10^{-5} T$  比较磁力摆在两端加上两个螺母和不加螺母在地磁场中的运动周期，我们得到磁力摆的转动惯量和磁矩分别为  $J_0 = 1.04 \times 10^{-6} kg \cdot m^2$ ， $m = 1.07 A/m^2$  研究两个磁力摆的耦合规律我们得到  $\omega > \omega^* > \omega_0$ ，其中  $\omega$  为两个小磁针同向运动的角速度， $\omega^*$  为两个小磁针反向运动的角速度， $\omega_0$  为单个小磁针在地磁场振动的角速度。并且随着两个小磁针距离  $L$  的增加，拍频也随之变缓。进一步的通过线性拟合得到耦合关系  $k' = \alpha \cdot \frac{m^2}{L^\beta} = \frac{1}{2} \|\omega^2 - \omega^{*2}\|$  中  $\beta = 2.69$ ， $\alpha = 3.06 \times 10^{-2} A^{-1} \cdot s^{-2}$ 。

## 参考文献

- [1] 吕斯骅，段家祗. 新编基础物理实验. 高等教育出版社, 2006.
- [2] 费业泰. 误差理论和数据处理. 北京: 机械工业出版社, 2000.

## 5 附件

### 5.1 原始数据

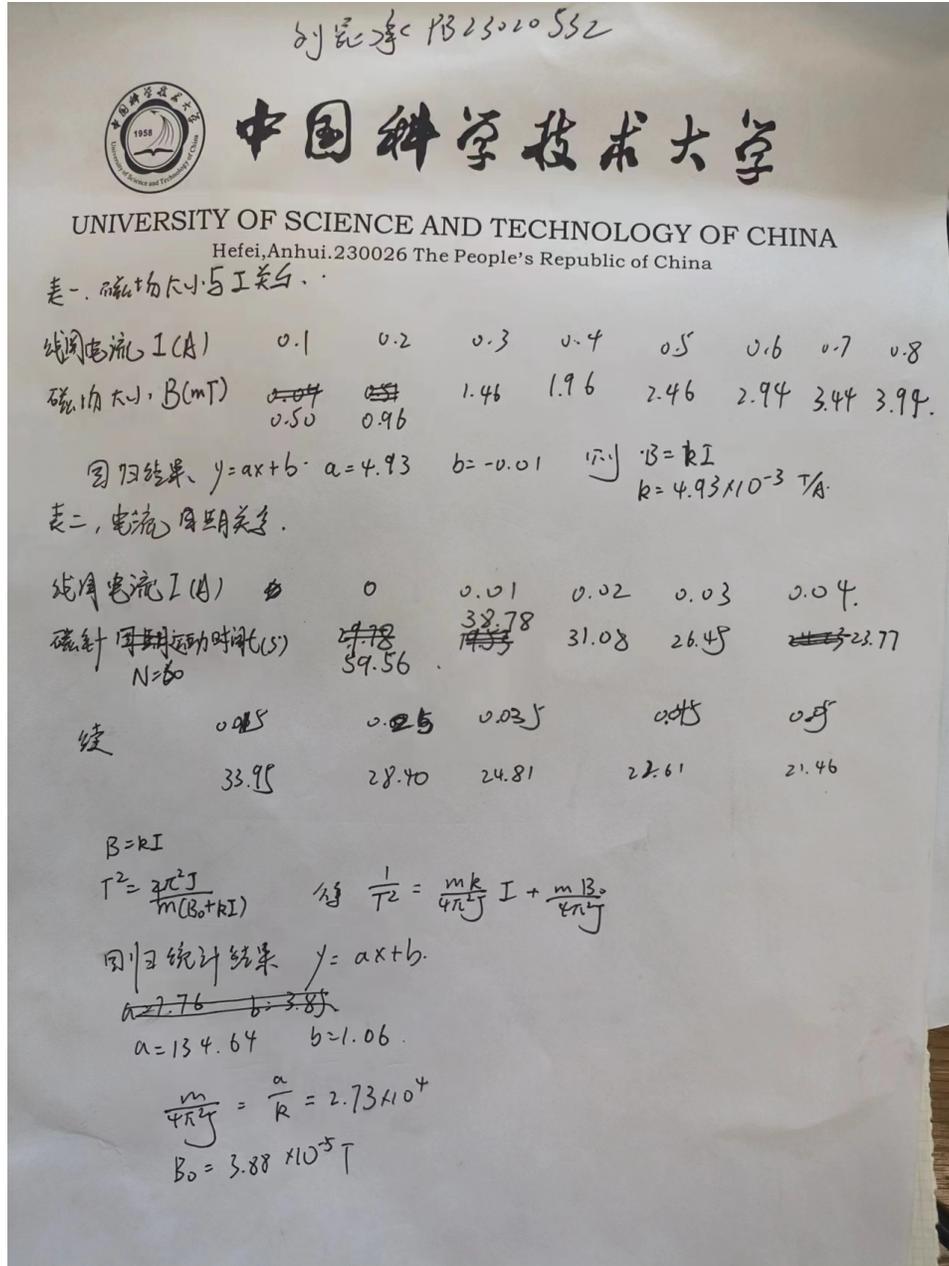


图 8: 原始数据 1

刘昆承 PB23020532



# 中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA  
Hefei, Anhui, 230026 The People's Republic of China

磁力摆量测量.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{MB_0}}$$

吊钩质量  $m_0$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I'}{MB_0}}$$

可动部分质量

砝码  $m_1 = 0.71g$   $m_2 = 0.67g$

表三, 测  $I_0$  的数据:

s.t.  $r_1 = r_2 = 2.50 \text{ cm}$ .  $I' = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 8.625 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

未加砝码 $m_1, m_2$	未加 $m_1, m_2$	加 $m_1, m_2$
$T(s) (N=60)$	59.56	80.60

解得  $I_0 = 1.04 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

得  $m = 1.07 \text{ A/m}^2$

表四. 耦合运动数据.

距离 $L$ (cm)	16.30	19.50	24.00	27.00	30.00	15.30
同向 $(N=40)$ (S)	23.98	26.91	32.19	34.35	36.00	20.46
反向 $(N=40)$ (S)	31.14	33.99	36.96	38.53	39.50	30.60

$$k' = \frac{M+m}{4\pi I_0 B} \propto \frac{m^2}{L^2} = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega^*)$$

由表四未加砝码三可知  $\omega > \omega^* > \omega_0$  其中  $\omega$  为同向,  $\omega^*$  为反向  
 $\omega_0$  为单个砝码对应的固有频率.

李海燕 5.12

图 9: 原始数据 2

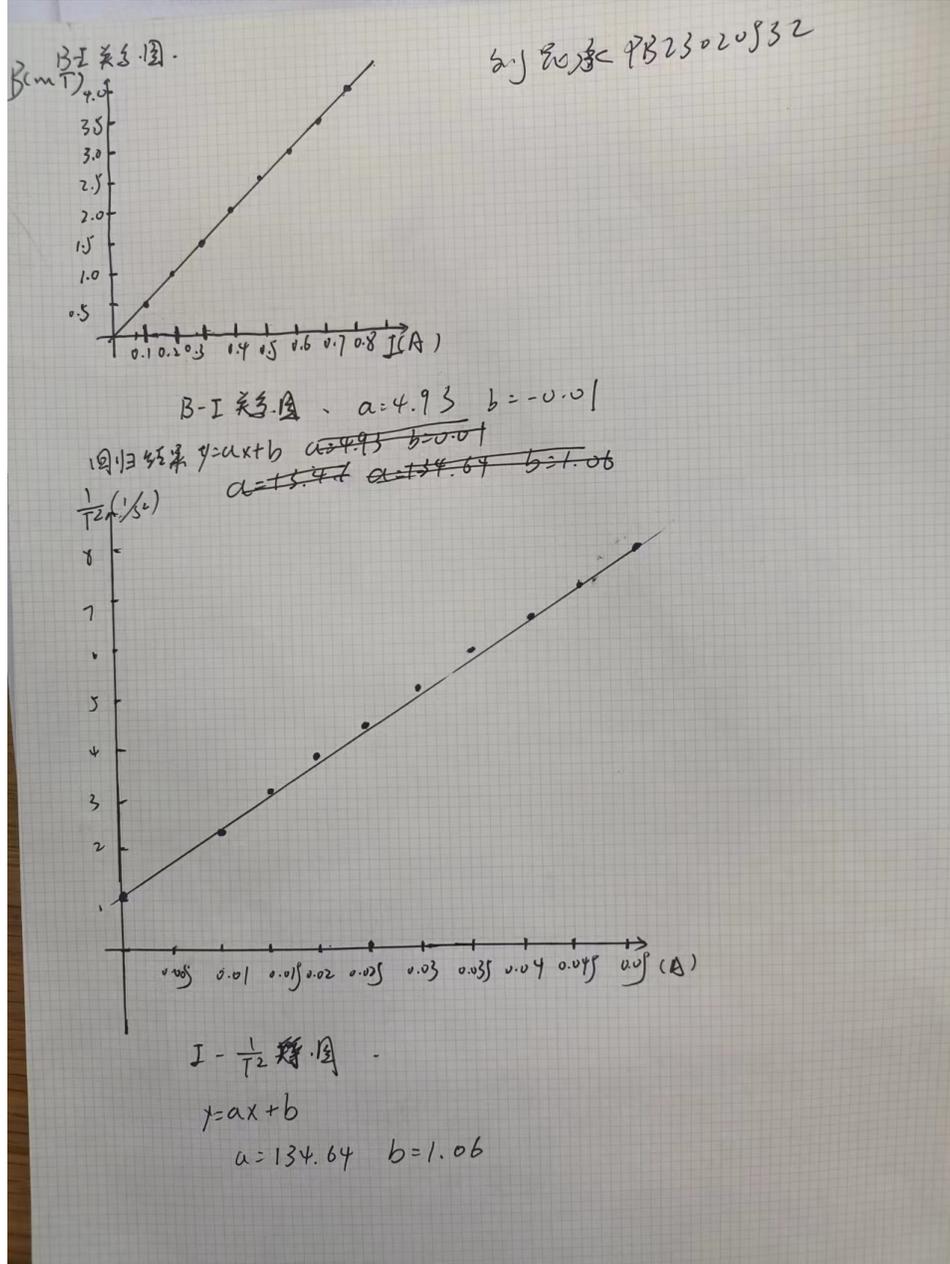


图 10: 原始数据 3