

单摆测合重力加速度

作者：刘昆承

学号：PB23020532

摘要

本次实验通过单摆测定了合肥市中国科学技术大学的重力加速度，并进行了数据处理，研究实验的误差，与误差产生的原因。最终测得重力加速度为 $g = 9.78 \text{ m/s}^2$ 标准不确定度为 0.02 m/s^2 。并研究了在改变摆长时 T^2 与摆长的关系，并用最小二乘法进行拟合。同时还研究了当摆角大于 5° 时单摆的运动规律，并用软件 Tracker 进行分析。

关键词：

单摆、重力加速度、不确定度、误差分析

资料与方法

引言： 地球的重力加速度在人类的科学历程中一直处于一个十分重要的地位。特别是在物理学刚刚出现是地位更加举足轻重。许多科学家都对重力加速度进行了测定，最早是伽利略使用斜面在 1590 年对重力加速度进行测定。而使用单摆测定重力加速度是现如今，每一个本科物理学习者都绕不开的实验。单摆实验不仅锻炼了实验者的实验基本操作，还要求其掌握基本的数据处理方法和实验报告的基本格式，为今后展开更复杂的实验甚至是科学研究奠定了良好的基础。而本次实验利用单摆，采用几种不同的方法对重力加速度进行测定。并研究在不同情况下单摆的运动规律，并分析处理数据，找到误差来源，进行讨论。

实验器材： 尼龙线，钢球，卷尺 ($\Delta_{\text{卷尺}} = 0.2 \text{ cm}$)，游标卡尺 ($\Delta_{\text{卡尺}} = 0.002 \text{ cm}$)，电子秒表 ($\Delta_{\text{秒表}} \ll 0.01 \text{ s}$)，单摆支架 (如图 1)，人的最大反应时间 $\Delta_{\text{人}} \approx 0.2 \text{ s}$ 。

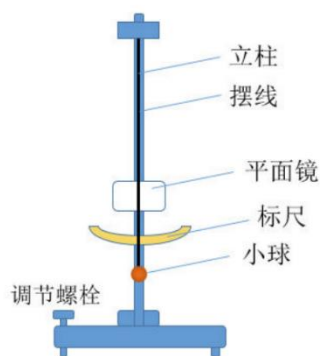


图 1

实验原理： 令摆长为 l , 小钢球质量为 m , 重力加速度为 g , 摆于重垂线的夹角为 θ , 空气阻力为 f_{air} 如图 2, 则我们可以得到微分方程:

$$-mg \sin \theta - f_{air} = ma$$

又因为 $\theta < 5^\circ$ 故 $\sin \theta \approx \theta$, 故我们可以得到

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$$

我们令 $\frac{g}{l} = \omega^2$ 则 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 则我们可以得到

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

而 $l = l_{\text{线长}} + \frac{d}{2}$ 。这样我们就可以通过测量线长和小球直径还有单摆的摆动周期来得到重力加速度 g 。

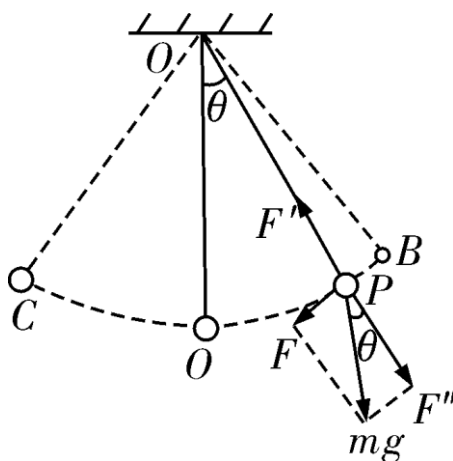


图 2

实验步骤：

1)

- 将单摆调整好
- 用卷尺平行测量线长 $l_{\text{线长}}$ 如图
- 用游标卡尺测量小球直径 d
- 将钢球拉离平衡位置一个角度($< 5^\circ$)，由静止释放
- 在小球摆过平衡位置时开始用电子秒表计时，测量 30 个周期。
- 在定摆长重复实验 6 次

2)

- 改变摆长，测量 6 次

3)

- 将小球拉离平衡位置一个大角度，然后使用手机拍摄视频

结果

通过定摆长 6 次重复实验我们得到数据，原始数据如附录 1。

表 1 定摆长实验数据统计

第 n 次实验	线长 l (cm)	直径 d (cm)	时间 nT (s)
1	70.20	2.170	50.80
2	70.11	2.170	50.80
3	70.09	2.160	50.93
4	70.15	2.200	50.89
5	70.12	2.200	50.88
6	70.13	2.198	50.85

注：n=30

在第一个实验中计算平均线长 (cm)

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^6 \frac{l_i}{6} \approx 70.13$$

并可以求得平均小球直径为(cm)

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^6 \frac{d_i}{6} \approx 2.183$$

30 个摆动周期总时间的平均值为(s)

$$n\bar{T} = \sum_{i=1}^6 \frac{nT_i}{6} \approx 50.86$$

然后通过单摆周期公式我们可以求得中国科学技术大学的加速度为(m/s²)

$$g = \frac{4\pi^2 \left(\bar{l} + \frac{\bar{d}}{2} \right)}{(n\bar{T})^2} \cdot n^2 = 9.78$$

接下来计算不确定度，线长测量次数为 6 次，则我们可以得到线长的 A 类不确定度为：

$$u_{lA} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (l_i - \bar{l})^2}{6(6-1)}} = 0.02$$

线长使用卷尺测量，卷尺的最大允差为 $\Delta_{\text{卷尺}} = 0.2\text{cm}$ ，可以得到线长的 B 类不确定度

$$u_{\text{卷尺}} \frac{\Delta_{\text{卷尺}}}{\sqrt{3}} \approx 0.12$$

则可以得到线长的标准不确定度 (cm)

$$u_{lc} = \sqrt{u_{\text{卷尺}}^2 + u_{lA}^2} \approx 0.12$$

然后小球直径的 A 类不确定度

$$u_{dA} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (d_i - \bar{d})^2}{6(6-1)}} \approx 0.01$$

小球直径用游标卡尺测量，游标卡尺的最大允差为 $\Delta_{\text{卡尺}} = 0.002\text{cm}$ 可以忽略不计，故我们得到小球直径的标准不确定度为

$$u_{dc} \approx u_{dA} = 0.01$$

单摆摆动 30 个周期的时间为 nT ，其 A 类不确定度为

$$u_{n\bar{T}A} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (nT_i - n\bar{T})^2}{6(6-1)}} \approx 0.02$$

单摆 30 个周期的 B 类不确定度由表的误差和人读数误差两方面构成，而实验所使用的是电子秒表最大允差可以忽略不计，即 $\Delta_{\text{表}} \approx 0$ 同样其不确定度 $u_{\text{表}} \approx 0$ ，而人的 $\Delta_{\text{人}} \approx 0.20$ ，则其不确定度为

$$u_{\lambda} = \frac{\Delta_{\lambda}}{\sqrt{3}} \approx 0.12$$

则可以得到测周期的标准不确定度为

$$u_{\overline{nTc}} = \sqrt{u_{\lambda}^2 + u_{\overline{nTA}}^2} \approx 0.12$$

由不确定度合成公式得到

$$u_c = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} u_{lc}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial(nT)} u_{\overline{nTc}}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial d} u_{dc}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{g}{\left(l + \frac{d}{2}\right)} u_{lc}\right)^2 + \left(2 \frac{g}{nT} u_{\overline{nTc}}\right)^2 + \left(\frac{g}{2\left(l + \frac{d}{2}\right)} u_{dc}\right)^2} \approx 0.018$$

则最终可以得到的加速度为

$$g = 9.78 \pm 0.02 \text{ m/s}^2$$

之后进行改变摆长的单摆实验，测得数据如表 2，原始数据如附录 1。

表 2 改变摆长实验数据统计

第 n 次实验	线长 l (cm)	直径 d (cm)	时间 nT (s)
1	63.75	2.200	48.50
2	59.47	2.200	46.87
3	53.88	2.200	44.71
4	42.98	2.198	39.98
5	35.70	2.200	36.48
6	73.49	2.200	52.00

注：n=30

将摆长 $\left(l + \frac{d}{2}\right)$ 与周期的平方 T^2 用最小二乘法进行拟合，得到如图结果

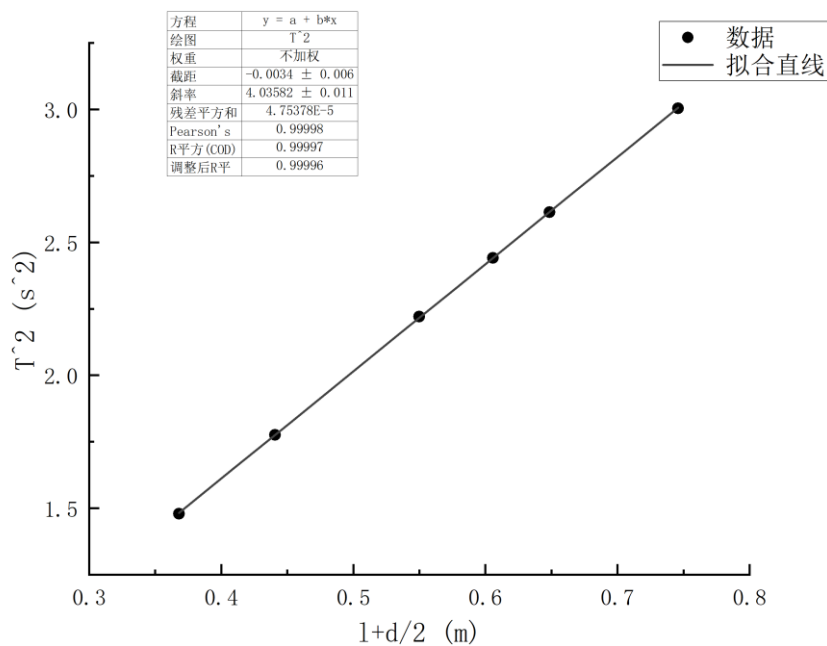


图 3

其中斜率 $k \approx 4.04$

我们由加速度公式可以得到

$$g = \frac{4\pi^2}{k} = 9.78$$

我们再进行大摆角的单摆实验。测得数据如图 4。

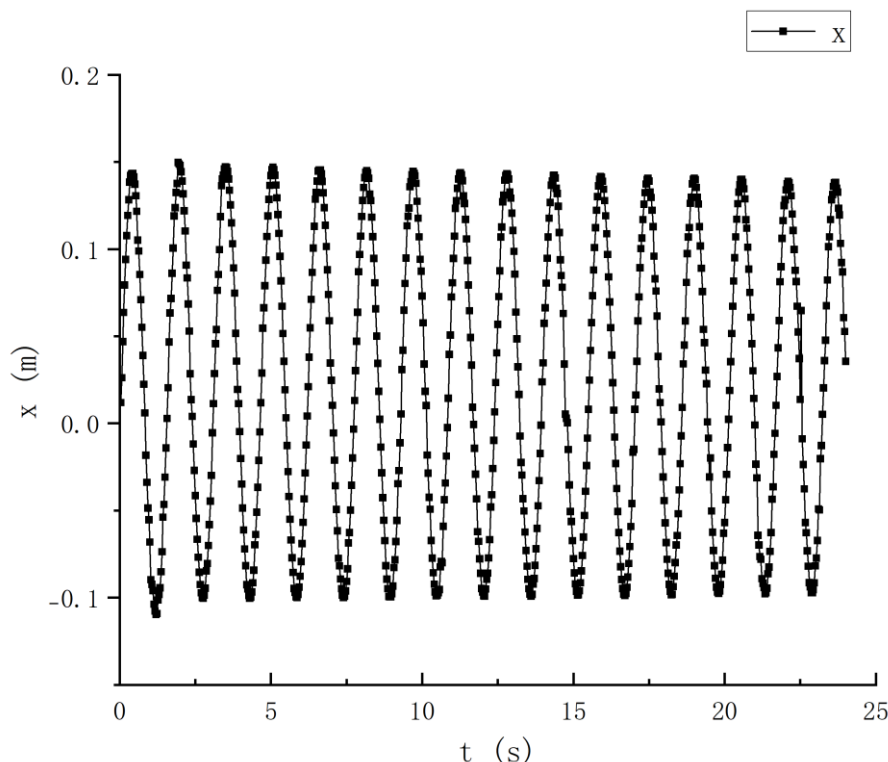


图 4

线长 $l=58.18\text{cm}$ ，小球的直径为 $d=2.200\text{cm}$ ，

从第二个周期（即 1.60s ）我们由 15 个单摆周期计算，当单摆进行到第 16 个周期时，此时的时间为 24.83s ，我们此次实验单摆的线长为 $l=58.18\text{cm}$ ，小球的直径为 $d=2.200\text{cm}$ ，通过若我们通过小摆角的单摆周期公式 $t = nT = n2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 我们可以得到 $\Delta t_{\text{理论}} = 23.19\text{s}$ ，而 $\Delta t_{\text{真}} = 23.23\text{s}$ ，真实值比理论值略大，此时我们需要修正。我们用单摆公式：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m} \left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m} \right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16} \right)}$$

进行修正代入数据我们可以计算得到 $T=23.22\text{s}$ 于真实值在误差范围内相等（相差万分之一之内）

然后我们讨论空气阻力的修正，在振动中我们知道有：

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

其中我们有： $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ， $\beta = \frac{\gamma}{2m}$ 为阻尼系数，显然在单摆中阻尼系数小为欠阻尼振动，我们有 $\beta < \omega_0$ 我们可以得到振动方程的解为：

$$x(t) = A \cos(\omega_f t + \varphi)$$

其中 $A = A_0 e^{-\beta t}$, $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, 而其中我们可以通过振幅的变化而得到阻尼系数 β , 我们通过编写程序, 如附录 2。我们对其如 A 的函数的非线性拟合我们可以得到其中的 $\beta = 0.00118 \pm 0.0047$, 如图 5。因此通过公式计算我们得到

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2} - \beta^2}} \approx 1.6954$$

而我们知道 $T \approx 1.6953$, 则误差占比为:

$$\eta = \frac{T^* - T}{T} \approx 5.90 \times 10^{-5}$$

修正精度在 10^{-5} 量级, 在 1% 的精度要求下完全可以忽略。

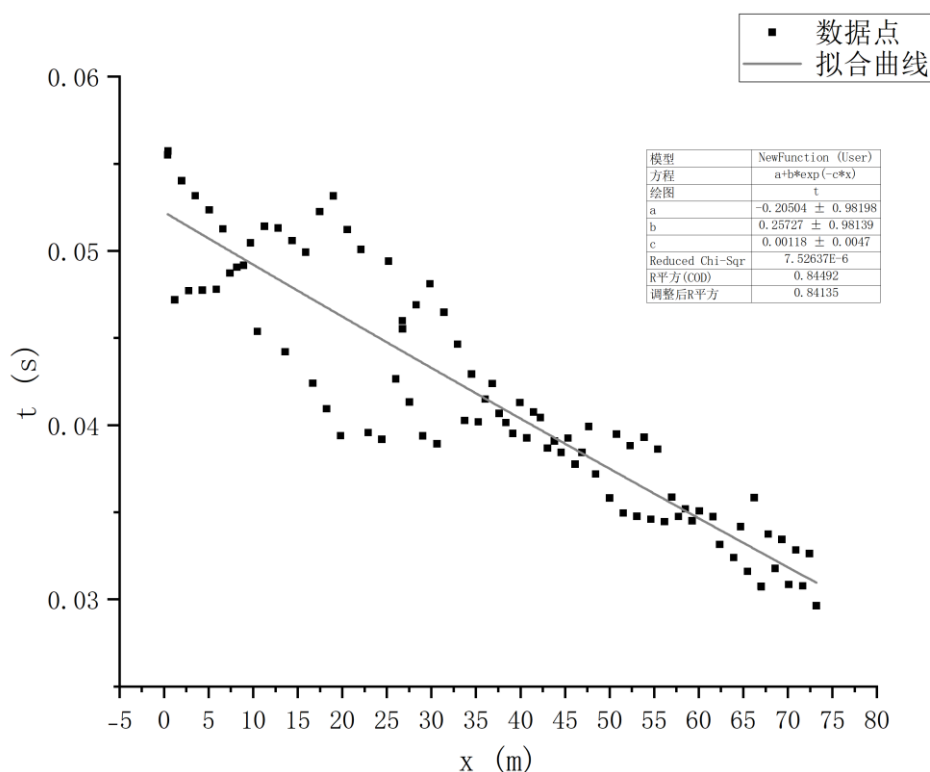


图 5

讨论

两个实验们可以比较精确的得到中国科学技术大学的重力加速度

- 1) $g = 9.78 \pm 0.02 m/s^2$
- 2) $g = 9.78 m/s^2$ ($R^2 = 0.9997$)

这与合肥当地重力加速 $g = 9.795\text{m/s}^2$ 在误差范围内相等。因而我们可以得出两种测定重力加速度的方法都能在误差范围内测得重力加速度。但同时我们也注意到这两种方法测定的重力加速度都约比真实值小 1%，经过研究可能的误差有以下几个原因

原因分析：

- 摆长测量不精确，本次实验先测量线长，再测量小球直径的方式来测量摆长，这样测量摆长的方式不够精确，反而要比直接使卷尺与小球相切测量的不确定度更大，而使摆长测量偏小，从而使测量的重力加速度略小于实际的重力加速度。
- 摆长在实验过程中改变，因为本次实验实验室用的实验装置较新，尼龙线并未被完全拉直，而在进行实验的过程中受力增加，而使测量值小于实际值。通过重力加速度计算我们可以得到在定摆长的实验中，若假定 g 为正确值我们可以得到线长 $l_{\text{理论线长}} = 0.7021\text{m}$ 而由实验测得的线长平均值为 $l_{\text{线长}} = 0.7013\text{m}$ 此时 $\Delta l \approx 0.8\text{mm}$ ，考虑到在定摆长和变摆长的 12 次测量中测量数据都有相同的倾向性，因此这个原因是完全有可能的。

- 实验中使用理想单摆计算重力加速度不准确，我们对摆角进行修正

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{摆长}}}{g}} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \sin^i \frac{\beta_0}{2} \right)^2 \right)$$

β_0 为摆角 β 的振幅，因为修正项衰减的很快，因此我们将修正项展开到第一项，我们取摆角最大，即 $\beta = 5^\circ$ 解得 $g = 9.7827\text{m/s}^2$ 与原结果几乎相同，故摆角不是造成误差的主要因素。

- 并没有从静止释放，用手释放很难完全静止，因此在释放时带有一定速度，形成圆锥摆。通过简单分析，当小球具有偏离摆平面的速度和位移时，这会造成重力加速度有不是在摆平面内的分量，使得测得的重力加速度变小。

实验的改进：

- 增加摆长和小球与线的质量的比值，并采用密度更大的材料，减小阻力。
- 采用电磁铁释放小球，使小球完全由静止释放，减小误差。
- 使用凯特摆来测重力加速度，使得摆的运动被完全限制在一个平面从而减小误差。

参考文献

- [1] 洪维贞等. 单摆的实验探究[J]. 物理实验, 2020(7): 62-64.
- [2] 费业泰. 误差理论与数据处理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2000.
- [3] 单摆法测重力加速度. 实验讲义. 2024

致谢

感谢中国科学技术大学物理实验教学中心支持

2024年3月22日

附录

I 实原始数据

刘昆承 P1323020552
用卷尺先测线顶端到球的顶端长，用卡尺测直径。
定摆长

实验次数 n	线长 l	直径 d	时间 nT	$n=30$
1	70.20 cm	2.170 cm	50.80 s	
2	70.11 cm	2.170 cm	50.80 s	
3	70.09 cm	2.160 cm	50.93 s	
4	70.15 cm	2.200 cm	50.89 s	
5	70.12 cm	2.200 cm	50.88 s	
6	70.13 cm	2.198 cm	50.85 s	

改变摆长

次 n	线长 l	直径 d	时间 nT (s)	$n=30$
1	63.75 cm	2.200 cm	48.50 s	
2	59.47 cm	2.200 cm	46.87 s	
3	53.88 cm	2.200 cm	44.71 s	
4	42.98 cm	2.198 cm	39.98 s	
5	35.70 cm	2.200 cm	36.48 s	
6	73.49 cm	2.200 cm	52.00 s	

最终 $l = 58.18 \text{ cm}$
 $d = 2.200 \text{ cm}$

1101C-08 201412-2500
2017.3.18

II 计算所用到的程序

```

1  #include<stdio.h>
2  #include<math.h>
3  struct point{
4      double timeis;
5      double xis;
6      double vis;
7  };
8
9  int main(void){
10
11      FILE *fp;
12      struct point p[2202];
13      struct point p1[500];
14      if(!(fp=fopen("D:\\DATAOF", "r"))){
15          printf("can't open");
16          return 1;
17      }
18      int i=0;char c1[20];
19      for(i=0;i<2202;i++){
20          fscanf(fp,"%s",c1);
21          int a[11];
22          a[0]=c1[0]-'0';
23          for(int k=0;k<9;k++){
24              a[k+1]=c1[k+2]-'0';
25          }
26          if(c1[12]=='-'){
27              a[10]=-(c1[13]-'0');
28          }
29          else if(c1[12]=='0'){
30              a[10]=0;
31          }
32          else{
33              a[10]=c1[12]-'0';
34          }
35          p[i].timeis=a[0];
36          for(int k=0;k<9;k++){
37              p[i].timeis+=a[k+1]*pow(10,-(k+1))
38          }
39          p[i].timeis*=pow(10,a[10]);
40
41          fscanf(fp,"%s",c1);
42          if(c1[0]=='-'){
43              a[0]=c1[1]-'0';
44              for(int k=0;k<9;k++){
45                  a[k+1]=c1[k+3]-'0';
46              }
47              if(c1[13]=='-'){
48                  a[10]=-(c1[14]-'0');
49              }
50              else if(c1[13]=='0'){
51                  a[10]=0;
52              }
53              else{
54                  a[10]=c1[13]-'0';
55              }
56              p[i].xis=a[0];
57              for(int k=0;k<9;k++){
58                  p[i].xis+=a[k+1]*pow(10,-(k+1));
59              }
60              p[i].xis*=pow(10,a[10]);
61          }
62          else{
63              a[0]=c1[0]-'0';
64              for(int k=0;k<9;k++){
65                  a[k+1]=c1[k+2]-'0';
66              }
67          }
68          if(c1[12]=='-'){
69              a[10]=-(c1[13]-'0');
70          }
71          else if(c1[12]=='0'){
72              a[10]=0;
73          }
74          else{
75              a[10]=c1[12]-'0';
76          }
77          p[i].xis=a[0];
78          for(int k=0;k<9;k++){
79              p[i].xis+=a[k+1]*pow(10,-(k+1));
80          }
81          p[i].xis*=pow(10,a[10]);
82          }
83
84          fscanf(fp,"%s",c1);
85          a[0]=c1[0]-'0';
86          for(int k=0;k<9;k++){
87              a[k+1]=c1[k+2]-'0';
88          }
89          if(c1[12]=='-'){
90              a[10]=-(c1[13]-'0');
91          }
92          else if(c1[12]=='0'){
93              a[10]=0;
94          }
95          else{
96              a[10]=c1[12]-'0';
97          }
98          p[i].vis=a[0];
99          for(int k=0;k<9;k++){
100              p[i].vis+=a[k+1]*pow(10,-(k+1));
101          }
102          p[i].vis*=pow(10,a[10]);
103      }
104      int j=0;
105      for(i=0;i<2202;i++){
106          if(p[i].vis<3E-2){
107              p1[j].timeis=p[i].timeis;
108              p1[j].xis=p[i].xis;
109              p1[j].vis=p[i].vis;
110              j++;
111          }
112      }
113      for(i=0;i<2202;i++){
114          printf("%e %e %e\n",p[i].timeis,p[i].xis,p[i].vis);
115      }
116
117      fclose(fp);
118      fp=fopen("D:\\dataof.txt","w");
119      double all;
120      for(i=0;i<2202;i++){
121          all+=p[i].xis;
122      }
123      all/=2202;
124      printf("%1f",all);
125      for(i=0;i<j;i++){
126          fprintf(fp,"%e %e\n",p1[i].timeis,p1[i].xis-all);
127      }
128      fclose(fp);
129      return 0;
130  }

```