

小磁针在磁场中的耦合运动模拟与分析

作者：刘昆承，学号：PB23020532

摘要：

小磁针在外磁场中的模型可以简化为偶极子振动模型，对于两个小磁针也可以用偶极子模型进行近似。通过对两个小磁针在外磁场耦合的计算模拟，发现 $\omega > \omega^* > \omega_0$ ，其中 ω 为两个小磁针同向运动的角速度， ω^* 为两个小磁针反向运动的角速度， ω_0 为单个小磁针在地磁场振动的角速度。并且可以注意到不管是在同向释放还是反向释放我们都可以得到结果，即随着 L 的增大，两个小磁针耦合减弱，他们振动的周期增加。通过对不同角度释放的小磁针的耦合运动规律的研究， θ_2 初始释放的角度越大则两个磁力摆的所运动的周期越大，控制变量并对得到的曲线和直线进行拟合，两个小磁针振幅所形成的拍。令 $k = \frac{T}{T_0}$ $k = a_1 + a_2 B_0 e^{a_3 L - a_4 m}$ ，其中 T 为振幅的周期， T_0 为小磁针振动的周期 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 为常数。以两个小磁针的角度为横纵坐标，可以得到美丽的图形，类似于李萨如图形，水平出垂直振动的比例都接近 1:1，只有相位上的差别。

关键词：

小磁针、耦合运动、磁矩 MATLAB 模拟

1 引言

耦合振动是指由若干个振动系统组成的，它们的振动模态不是独立的，而受到从一个模态到其他模态的能量传递影响的振动。而在小磁针产生磁场，在外磁场中也会产生耦合，即他们的能量或者振动通过磁场传递，从而影响到另一个小磁针的振动。在磁场中，两个小磁针在磁场中的振动模式和摆的振动模式相似。磁力摆是测量水平地磁场的常用实验装置，通过研究磁力摆在地磁场中的周期运动可以测量地磁场的水平分量

一个偶极子会在外部产生一个磁场，而当两个小磁针的距离远大于小磁针微观结构大小时，我们可以把小磁针近似成偶极子来研究小磁针之间的耦合振动。耦合振动在工程领域中有着相当多的应用，如建筑结构、桥梁、飞机、多系统的优化。通过对耦合的研究和建模，我们可以进一步推动技术发展，优化工程设计，具有重要的研究价值和意义。

2 模型的建立和分析

2.1 单个小磁针的运动分析

一个小磁针在磁场中，如图1。我们知道小磁针所受的力矩^[1] 为

$$\mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{m}$ 是的磁矩， I 是磁力摆的转动惯量， B_0 所处位置的磁感应强度我们可以列出方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mB_0}{I} \cdot \sin\theta \quad (2)$$

偏离平衡位置 $\theta < 5^\circ$ 时，有受到磁力的回复力做类似单摆运动^[2]。方程2可以近似写为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mB_0}{I} \cdot \theta \quad (3)$$

其中 m 是磁力摆的磁矩大小， I 是磁力摆的转动惯量， B 是磁力摆所处位置的磁感应强度大小

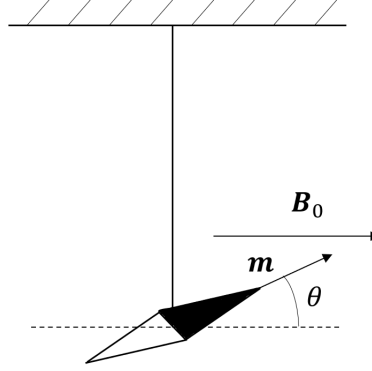


图 1: 小磁针运动分析

2.2 两个小磁针的耦合分析

我们知道一个磁偶极子的磁矩为 $\mathbf{m}$ 时，在空间中产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \mathbf{m}}{4\pi L^3} + \frac{3\mu_0 \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{4\pi L^3} \quad (4)$$

当有如图2两个距离为 L 的相同的小磁针时，

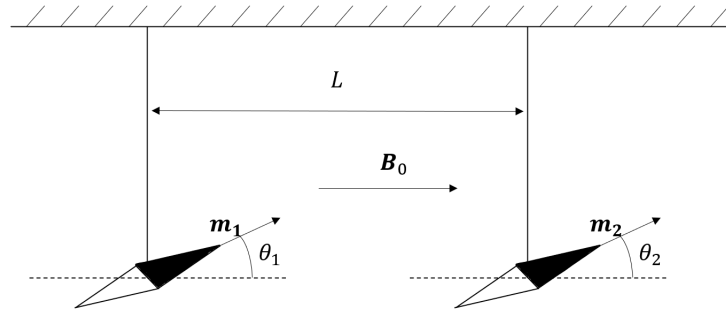


图 2: 两磁针耦合运动分析

当 L 远大于小磁针的微观尺度的时候，对右边的小磁针分析可以知道，其所处的位置的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 - \frac{\mu_0 \mathbf{m}_1}{4\pi L^3} + \frac{3\mu_0 \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{4\pi L^3} \quad (5)$$

其中 $\hat{\mathbf{r}}$ 为 B_0 的单位方向 $\mathbf{m}_1$ 为左边小磁针的磁矩。因此对右边的小磁针我们可以列出微分方程

$$I_2 \cdot \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\mathbf{m}_1 \times \left(\mathbf{B}_0 - \frac{\mu_0 \mathbf{m}_1}{4\pi L^3} + \frac{3\mu_0 \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{4\pi L^3} \right) \quad (6)$$

同样最左边的小磁针我们可以得到微分方程

$$I_1 \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\mathbf{m}_2 \times \left(\mathbf{B}_0 - \frac{\mu_0 \mathbf{m}_2}{4\pi L^3} + \frac{3\mu_0 \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{4\pi L^3} \right) \quad (7)$$

我们将矢量化成标量得到微分方程组

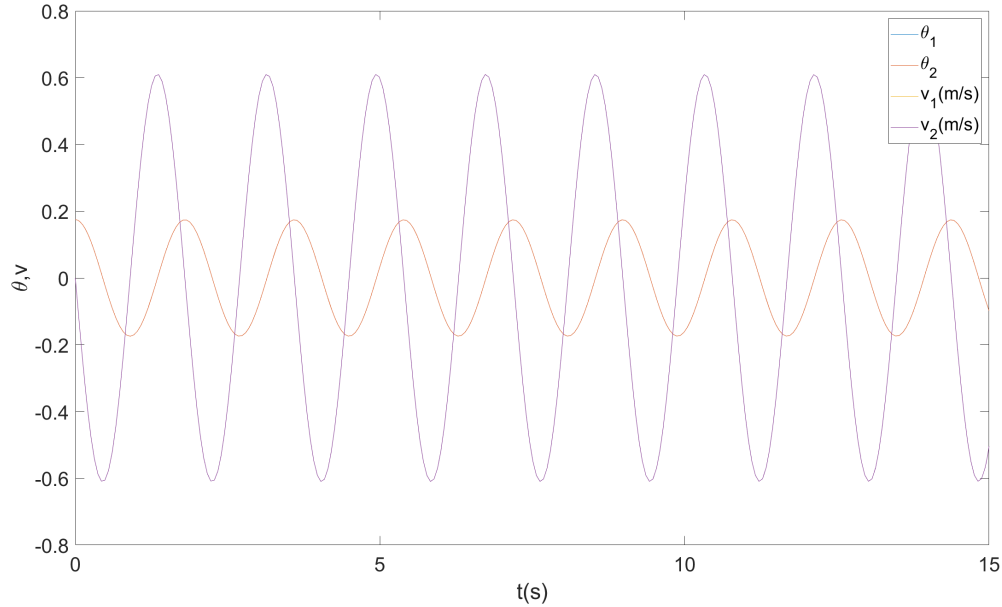
$$\begin{cases} I_2 \cdot \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{\mu_0 m_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{4\pi L^3} + \frac{3\mu_0 m_1^2 \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{4\pi L^3} + m_1 B_0 \sin\theta_2 \\ I_1 \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{\mu_0 m_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{4\pi L^3} + \frac{3\mu_0 m_2^2 \cos\theta_2 \cdot \sin\theta_1}{4\pi L^3} + m_2 B_0 \sin\theta_1 \end{cases} \quad (8)$$

3 MATLAB 计算

假设小磁针在地磁场中取 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 0.3 \text{A} \cdot \text{m}^{-2}$, $L = 0.15 \text{m}$, $I_0 = 1 \times 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m}^2$, $B_0 = 3.88 \times 10^{-5} \text{T}$,

3.1 小角度释放不同距离耦合分析

当 $\theta \leq 5^\circ$ 时, 使得两个小磁针在相同角度同向由静止释放, 都取 $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{18}$, 当 $L=0.1$ 时, 可以得到如图3的结果



改

变两个小磁针的距离我们分别以 $L = 0.1, 0.12 \dots 0.40 \text{m}$ 进行计算得到如图组结果

图 3: 两磁针同向小角度静止释放

同样的他们反向时释放时有得到如图4

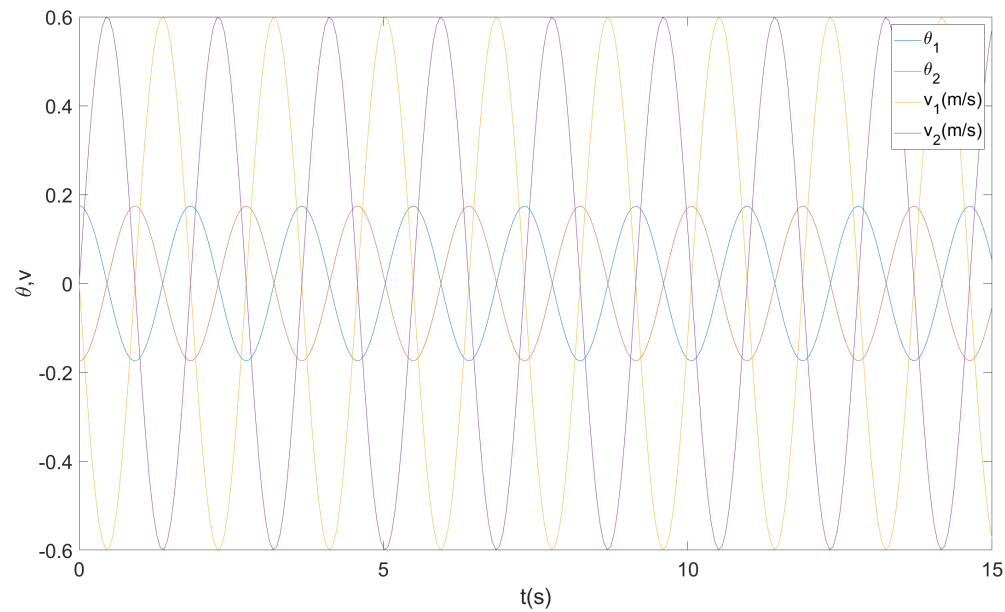


图 4: 两磁针反向角度静止释放

我们与同样条件的单个小磁针对比，单个小磁针运动如图5

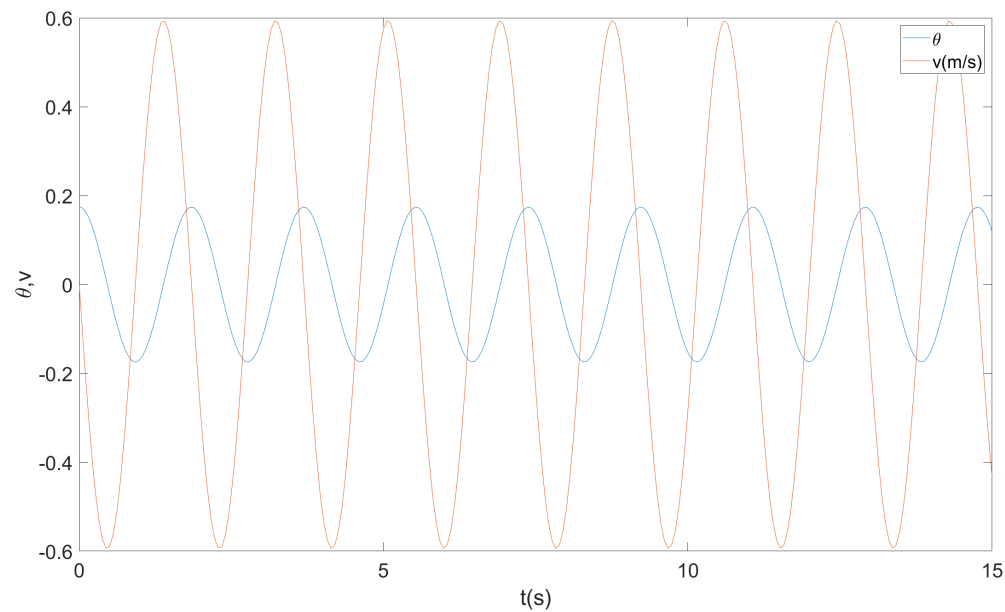


图 5: d 单个小角度静止释放

我们注意到 $\omega > \omega^* > \omega_0$ ，其中 ω 为两个小磁针同向运动的角速度， ω^* 为两个小磁针反向运动的角速度， ω_0 ，为单个小磁针在地磁场振动的角速度。我们还是以相同的角度6、7、8、9

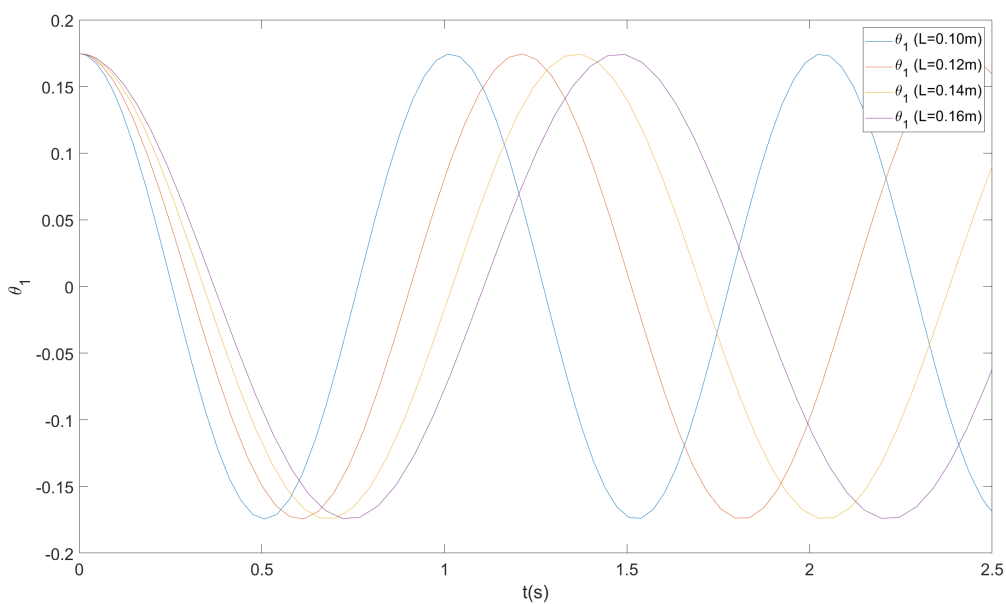


图 6: 距离 $L = 0.10 - 0.16m$

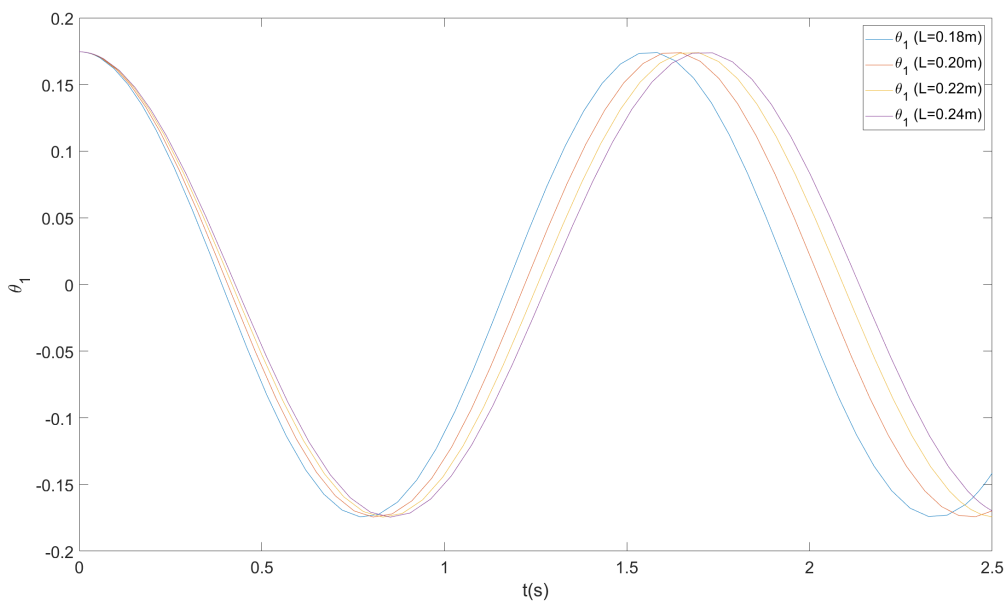


图 7: 距离 $L = 0.18 - 0.24m$

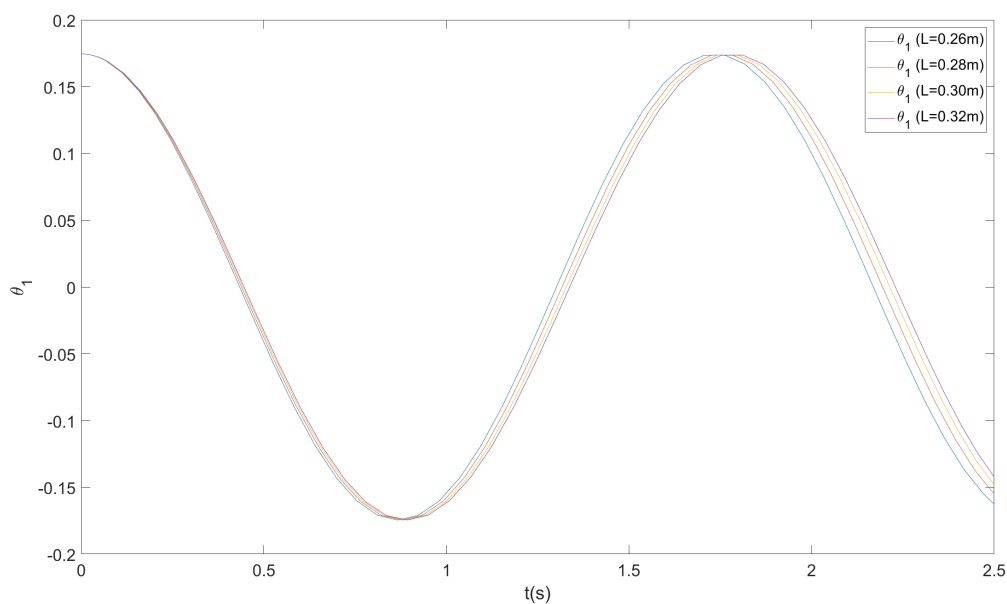


图 8: 距离 $L = 0.26 - 0.34m$

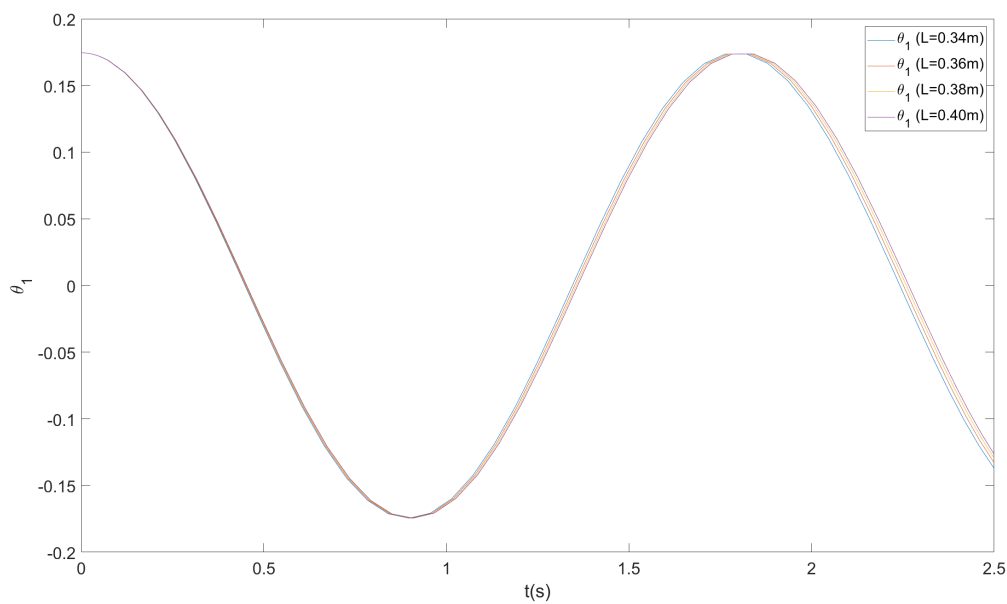


图 9: 距离 $L = 0.36 - 0.40m$

当小磁针反向同角度释放时我们可以得到如图进行计算得到如图组结果10、11、12、13 我们注意到不管在什么 L 下都有关系式 $\omega > \omega^* > \omega_0$ ，并且我们可以注意到不管是在同向释放还是反

向释放我们都可以得到结果，即随着 L 的增大，两个小磁针耦合减弱，他们振动的周期增加

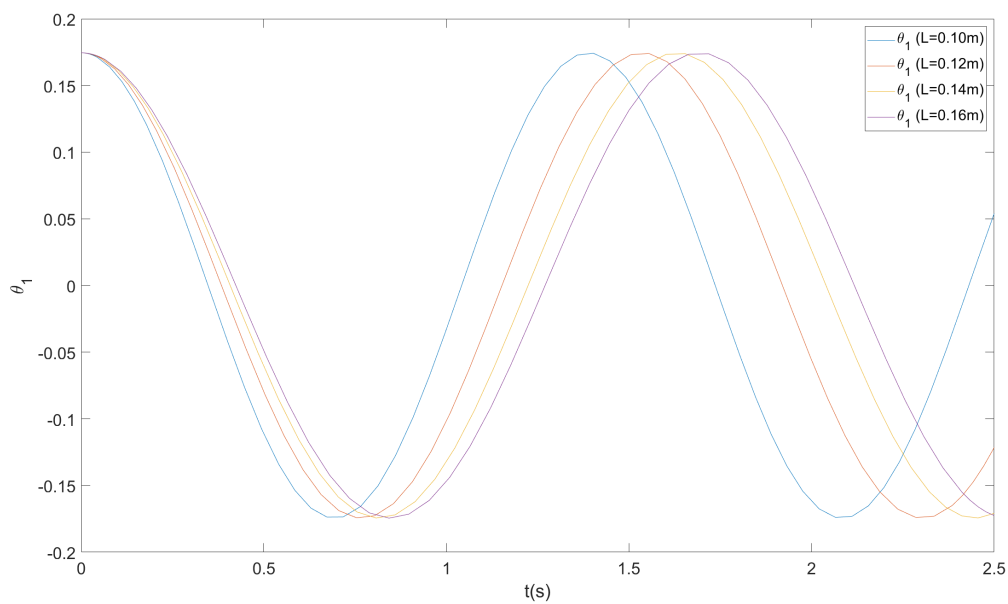


图 10: 距离 $L = 0.10 - 0.16m$

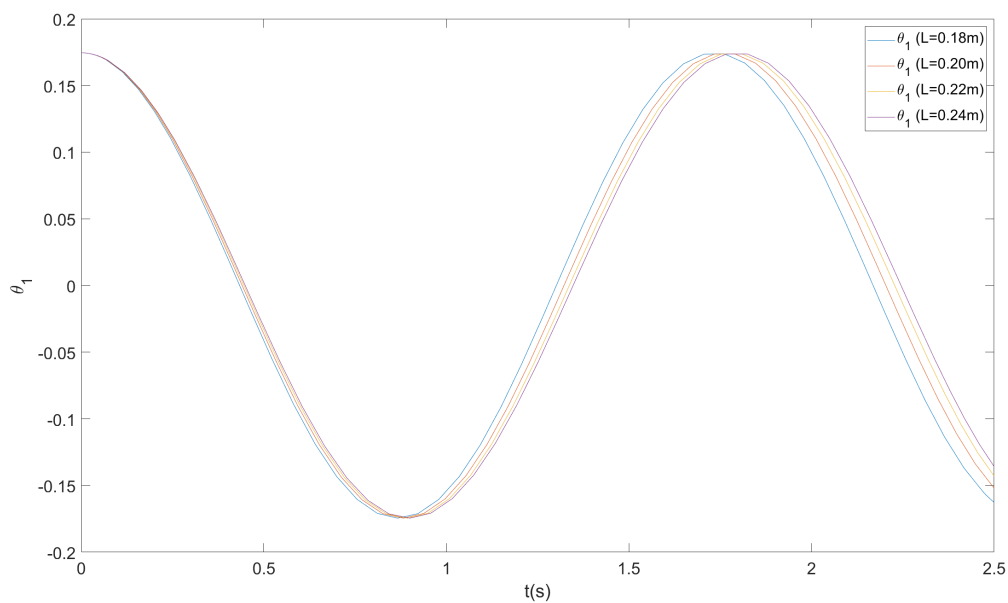


图 11: 距离 $L = 0.18 - 0.24m$

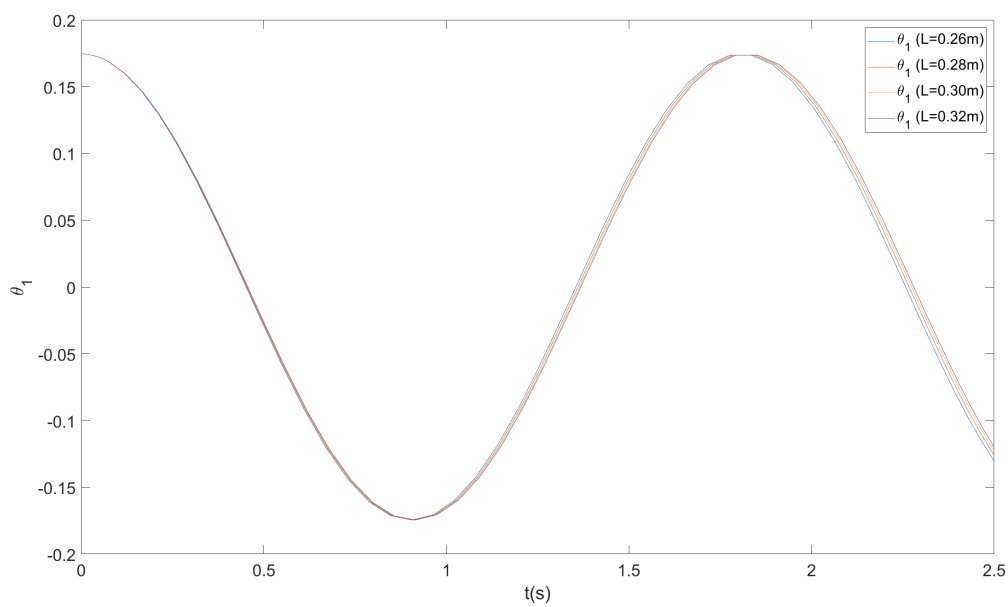


图 12: 距离 $L = 0.26 - 0.34m$

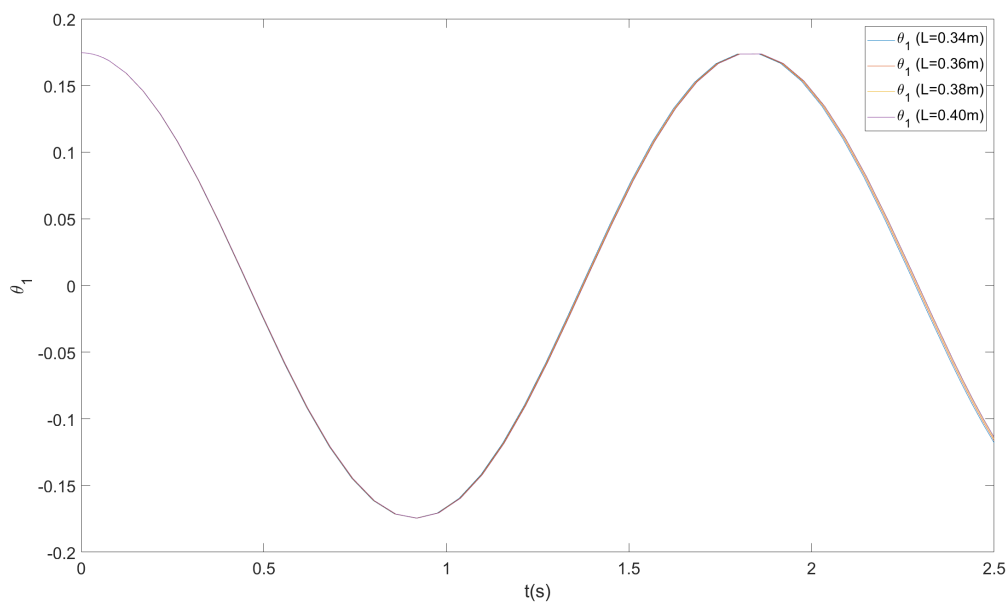


图 13: 距离 $L = 0.36 - 0.40m$

3.2 同距离不同初始角（大角度）度释放小磁针

3.2.1 不同角度周期异常现象分析

我们固定 $\theta_1 = \frac{\pi}{18} \approx 5^\circ$ 不变改变 θ_2 的释放角度从 $\theta_2 = 5^\circ \approx 0.17$ 开始每隔 $\theta_2 = 5^\circ \approx 0.17$ 释放直到 $\theta_2 = 1.53 \leq \frac{\pi}{2}$

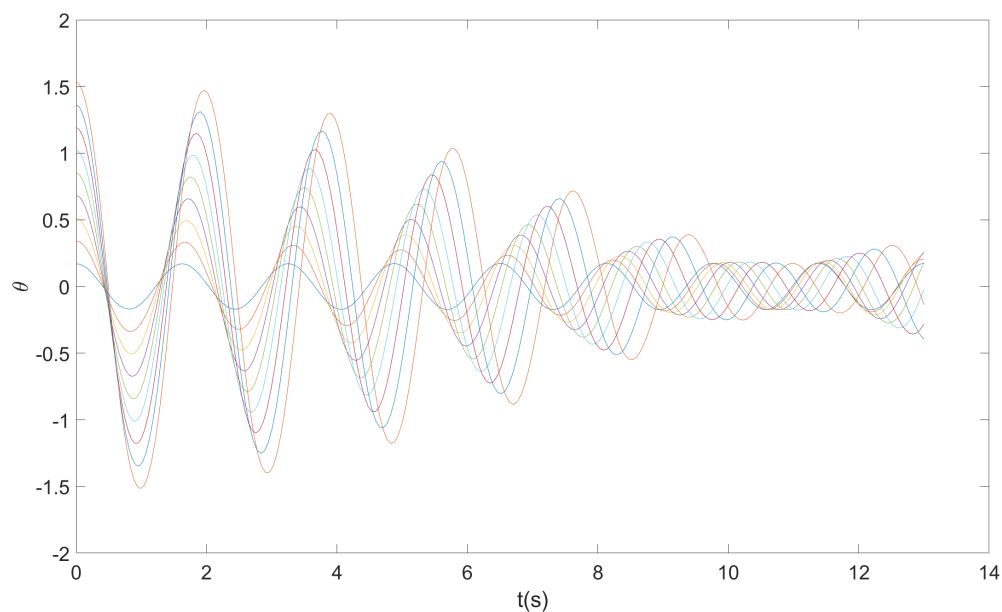


图 14: 改变 θ_2 , $\theta_2 - t$ 关系

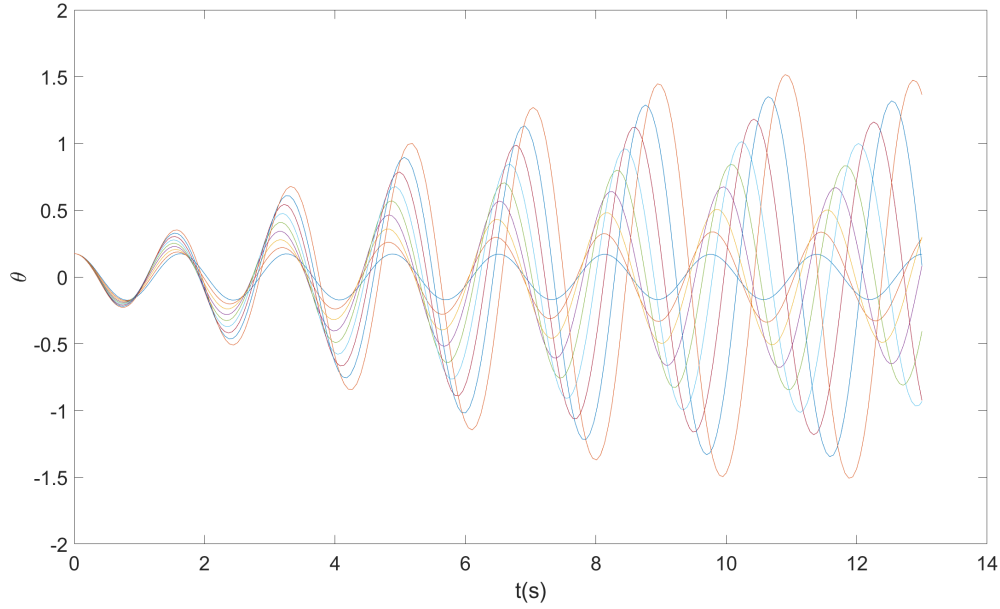


图 15: 改变 θ_2 , $\theta_1 - t$ 关系

我们绘制 θ_2 不同时释放的的磁力摆的运动 $\theta_2 - t$ 图, 如图14 $\theta_1 - t$ 图, 如图15, 对比图14和图15 我们容易发现 θ_2 初始释放的角度越大则两个磁力摆的 θ_1 , θ_2 所运动的周期越大从而 ω 越小, 这是易于理解的, 从式8我们可以看到

$$\begin{cases} I_2 \cdot \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{\mu_0 m_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{4\pi L^3} + \frac{3\mu_0 m_1^2 \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{4\pi L^3} + m_1 B_0 \sin\theta_2 \\ I_1 \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{\mu_0 m_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{4\pi L^3} + \frac{3\mu_0 m_2^2 \cos\theta_2 \cdot \sin\theta_1}{4\pi L^3} + m_2 B_0 \sin\theta_1 \end{cases}$$

在 θ_1 , θ_2 较小时, 由于 $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ 微分方程可以写为

$$\begin{cases} I_2 \cdot \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{\mu_0 m_1^2 (\theta_2 - \theta_1)}{4\pi L^3} + \frac{3\mu_0 m_1^2 \cdot \theta_2}{4\pi L^3} + m_1 B_0 \theta_2 \\ I_1 \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{\mu_0 m_2^2 (\theta_1 - \theta_2)}{4\pi L^3} + \frac{3\mu_0 m_2^2 \cdot \theta_1}{4\pi L^3} + m_2 B_0 \theta_1 \end{cases} \quad (9)$$

我们可以解出通解, 同向振动角速度 ω , 反向振动 ω^*

$$\omega = \sqrt{k + 3k'}, \quad \omega^* = \sqrt{k + k'} \quad (10)$$

$$k = \frac{mB_0}{I_0}, \quad k' = \frac{\mu_0 m^2}{4\pi I_0 L^3} \quad (11)$$

我们注意到当 θ_2 , θ_1 都较大时 $\sin\theta$ 不再能近似成 θ , 而我们知道 θ 是线性增长的而 $\sin\theta$ 是非线性的, 且有 $\sin\theta < \theta$ 不妨令 $\theta_2 > \theta_1 > 0$ 我们注意到右边第三项系数为 $m_1 B_0$ 左边两项系数为 $\frac{\mu_0 m_1^2}{4\pi L^3}$, 在我们讨论的假设下, 两个小磁针在地磁场 B_0 中耦合运动我们知道 $m_1 B_0 \gg \frac{\mu_0 m_1^2}{4\pi L^3}$ 。故我们先忽略左边两项我们容易得到 $m_1 B_0 \theta_2 > m_1 B_0 \sin\theta_2 \Rightarrow$ 8中 $\left| \frac{d^2\theta_2}{dt^2} \right| >$ 式9中 $\left| \frac{d^2\theta_2}{dt^2} \right|$ 其他情况同

理可以分析，得到同样的结果。因此在大角度时，一个周期所花的时间要更加的长，可以得到计算中的现象。同样的当 θ_2 释放角为负时，注意到图16、17

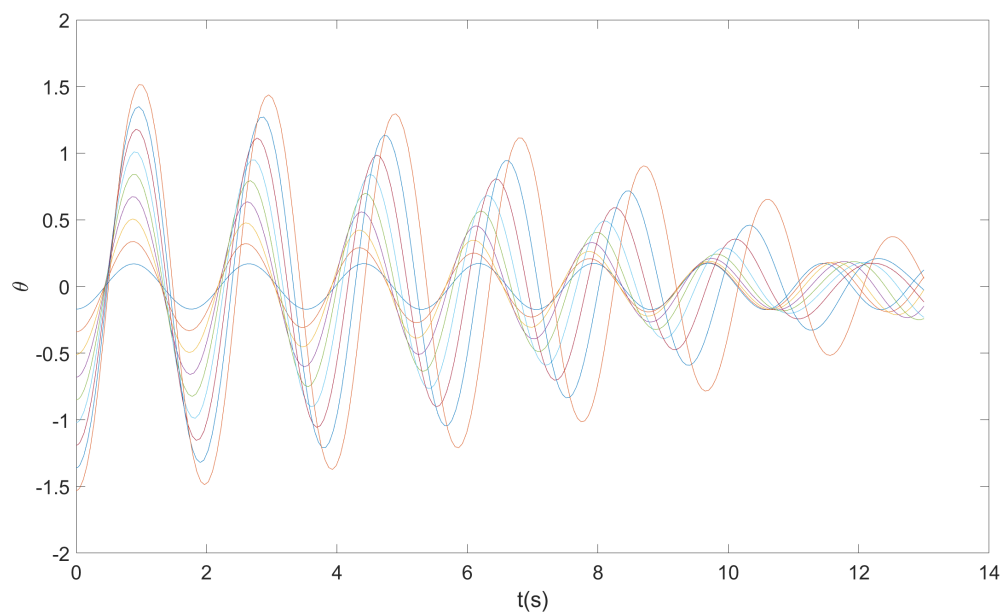


图 16: 改变 θ_2 , $\theta_2 - t$ 关系 (不同向)

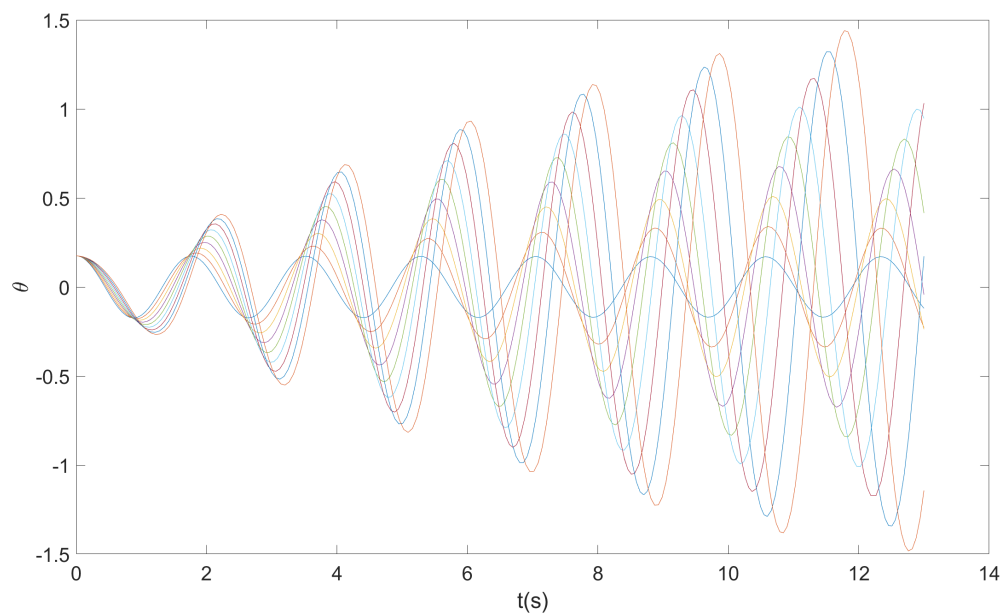


图 17: 改变 θ_2 , $\theta_1 - t$ 关系 (不同向)

3.2.2 两磁针振幅随时间变化观察

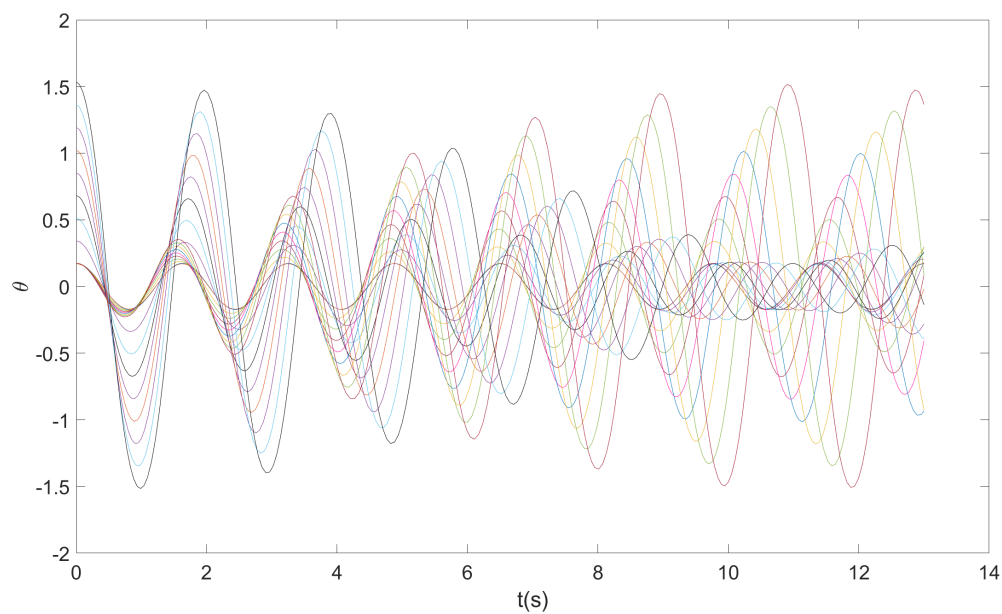


图 18: 不同初始角释放 θ_1, θ_2 关系图

由图18我们看到，不管在何种角度释放都会有，较大的角振幅逐渐减小，而较小的角振幅逐渐增大，这也是显然的。两个磁针的振动都不处于稳恒态，能量大的会将能量转移到能量小的磁针。我们进一步考虑这个“能量的转换”也应该有一个周期，这是两个小磁针振幅所形成的拍。

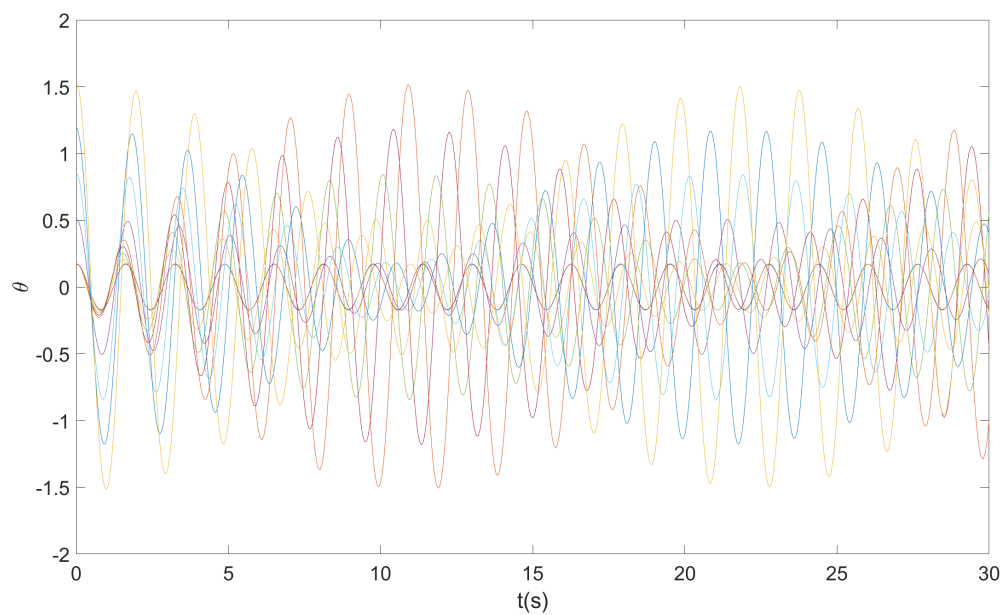


图 19: 同向释放振幅的拍

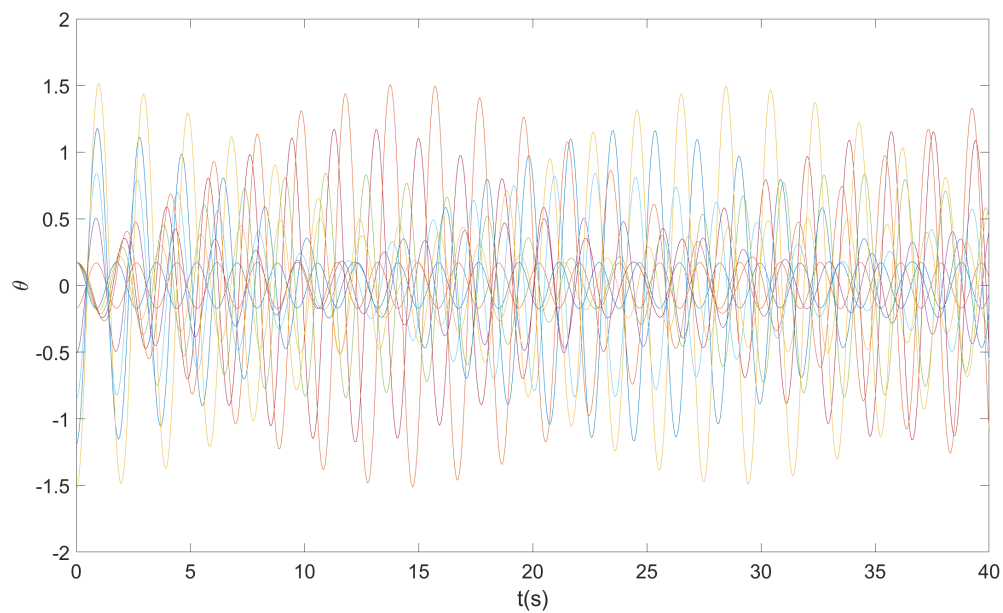


图 20: 反向释放振幅的拍

我们增加振动的时间进行计算如图19、20，的确如我们的理论形成了拍，我们观察发现，这个振幅的拍应该由两个振幅不同的振动合成设一质点同时参与了角频率分别为 ω_1 , ω_2 的两个同

方向的简谐振动为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 + \varphi_1) \quad (12)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 + \varphi_2) \quad (13)$$

$$(14)$$

又因为初始时 θ_1 较小, 在图中我们注意到振幅最小时 $A_1 - A_2 \approx 0$, 我们简化记 $A_1 = A_2 = A$

$$x = x_1 + x_2 = A [\cos(\omega_1 + \varphi_1) + \cos(\omega_2 + \varphi_2)] \quad (15)$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (16)$$

由图19、20观察我们注意到两个振动的 $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$, 且有 $\omega_1, \omega_2, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1$ 则对于振动来说我们有

$$x = A' \cos\left(\omega_1 t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right), \quad (17)$$

$$A' = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \quad (18)$$

其中 A' 为振幅, 则振幅的周期为

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \quad (19)$$

我们令 ω_1, ω_2 的周期为 T_0 我们对比不同角度数据发现, 无论是同向释放还是反向释放振幅的周期和小磁针的周期都为一个确定值 $\frac{T}{T_0} \approx \frac{51}{4}$ 这个比例可能只和两磁针本身和距离有关, 于释放角度无关。我们令这个比值为 $k = \frac{T}{T_0}$ 我们基于这个猜想进行研究改变初始条件, 我们采用控制变量法, 不改变的变量与此条件相同: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H \cdot m^{-1}$, $m = 0.3 A \cdot m^{-2}$, $L = 0.15 m$, $I_0 = 1 \times 10^{-6} kg \cdot m^2$, $B_0 = 3.88 \times 10^{-5} T$, 我们得到如表1 **注:** (改变 I_0 经对比不改变 k , 这也是易于理解的, 改变转动惯量应该只会改变本身周期的时间而不会改变他们的比例)

表 1: 改变参数两磁针耦合结果

次数	计算类型					
	距离 $L(m)$	对应 k 值	外磁场 $B_0(T)$	对应 k 值	磁矩 $m(A/m^2)$	对应 k 值
1	0.150	7.00	2.00×10^{-5}	7.85	0.100	30.00
2	0.175	9.40	2.25×10^{-5}	8.67	0.125	26.50
3	0.200	12.75	2.50×10^{-5}	9.33	0.150	22.00
4	0.225	16.67	2.75×10^{-5}	10.00	0.175	19.75
5	0.250	21.50	3.00×10^{-5}	10.50	0.200	18.00
6	0.275	27.00	3.25×10^{-5}	11.25	0.225	15.83
7	0.300	33.50	3.50×10^{-5}	11.75	0.250	14.33
8	0.325	40.00	3.75×10^{-5}	12.50	0.275	13.50
9	0.350	48.00	4.00×10^{-5}	13.00	0.300	12.75
10	0.375	56.00	4.25×10^{-5}	13.67	0.325	12.00
11	0.400	64.00	4.50×10^{-5}	14.33	0.350	11.33

分别对各个变量进行线性拟合得到如图21、22、23

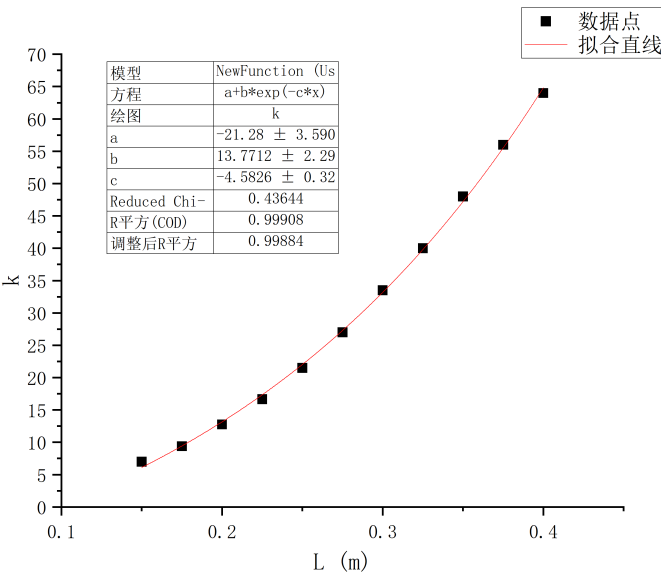


图 21: $k - L$

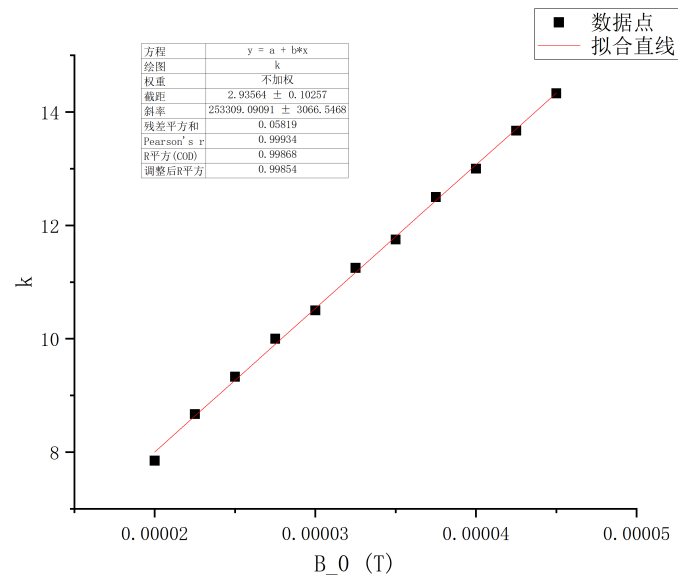


图 22: $k - B_0$

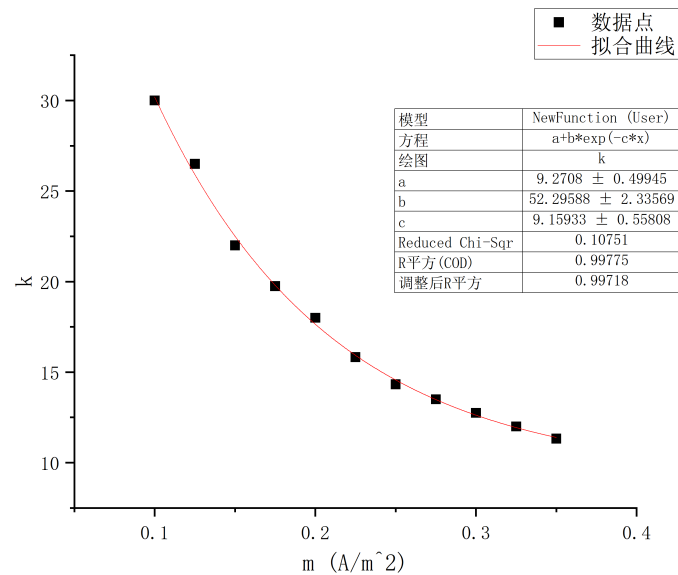


图 23: $k - m$

因此我们可以猜测耦合周期的比例 k 与其他变量如下关系

$$k = a_1 + a_2 B_0 e^{a_3 L - a_4 m}$$

(20)

其中 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 为常数。

3.2.3 振动垂直方向合成图形

改变 θ_2 角度我们画出在不同 θ_2 下的 $\theta_1 - \theta_2$ 图像，我们注意到图形并没有完全封闭，但形成了近似李萨如，如图组3.2.3我们注意到图形并没有完全封闭，但形成了近似李萨如图形我们可以算出近似的水平垂直振动频率的比例

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{N_1}{N_2} \quad (21)$$

其中 N_1 为水平切线的切点数， N_2 垂直切线上的切点数，我们得到：

$$\begin{aligned} \frac{f_x}{f_y} = \frac{5}{5} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{18}, \theta_2 = -\frac{2\pi}{5} \\ \frac{f_x}{f_y} = \frac{7}{7} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{18}, \theta_2 = -\frac{\pi}{3} \quad \dots\dots \end{aligned}$$

注意到他们的水平垂直振动的比例都为或者接近 1 : 1 也就是说他们只有相位上的差别而没有频率上的差别。

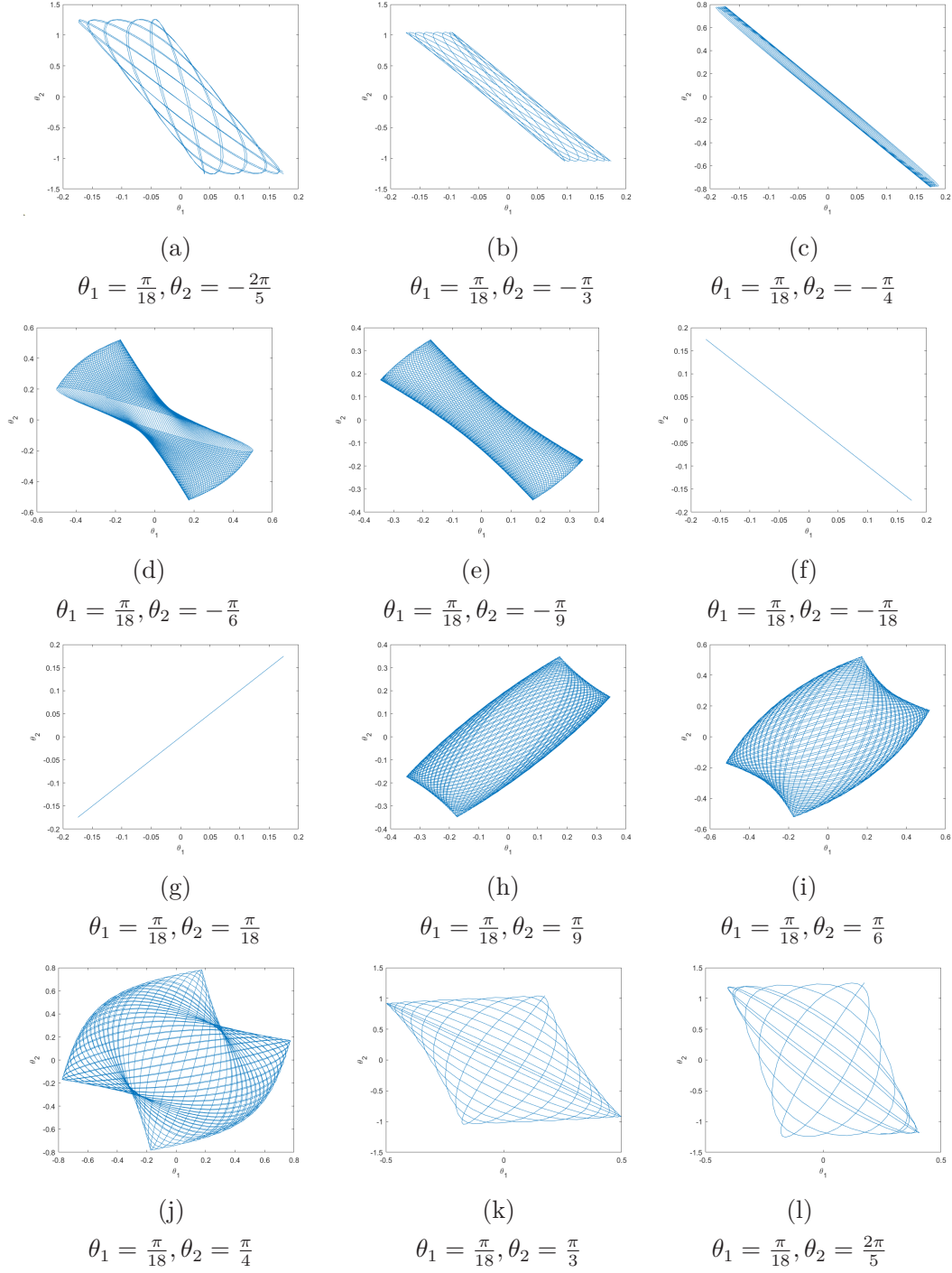


图 24: 耦合振动垂直方向合成图形

4 结论

小磁针在外磁场中的模型可以简化为偶极子振动模型 $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mB_0}{J} \cdot \sin\theta$ ，这也表明小磁针振动的形式是一个简谐振动，并且磁针的振动周期和外磁场的强度有关。对于两个小磁针也可以用偶极子模型进行近似研究。通过对两个小磁针在外磁场的计算模拟，发现两个小磁针在外磁场下

也近似的做简谐振动，但受到另一个磁针耦合的影响。 $\omega > \omega^* > \omega_0$ ，其中 ω 为两个小磁针同向运动的角速度， ω^* 为两个小磁针反向运动的角速度， ω_0 为单个小磁针在地磁场振动的角速度。并且可以注意到不管是在同向释放还是反向释放我们都可以得到结果，即随着 L 的增大，两个小磁针耦合减弱，他们振动的周期增加。通过对不同角度释放的小磁针的耦合运动规律的研究， θ_2 初始释放的角度越大则两个磁力摆的 θ_1 ， θ_2 所运动的周期越大从而 ω 越小，进一步通过控制变量并对得到的曲线和直线进行拟合，两个小磁针振幅所形成的拍。令 $k = \frac{T}{T_0}$ $k = a_1 + a_2 \mathbf{B}_0 e^{a_3 L - a_4 m}$ ，其中 T 为振幅的周期， T_0 为小磁针振动的周期 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 为常数。以两个小磁针的角度为横纵坐标，可以得到美丽的图形，类似于李萨如图形，并求出了水平出垂直振动的比例都接近 1 : 1，只有相位上的差别。

参考文献

- [1] 叶邦角胡友秋, 程福臻. 电磁学与电动力学. 科学出版社, 2008.
- [2] 秦敢杨维纮. 力学与理论力学. 科学出版社, 2008.